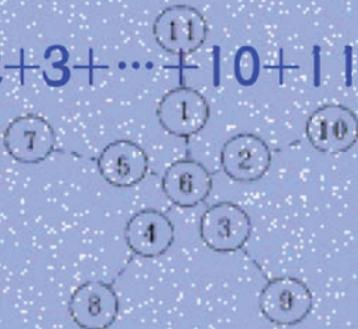
풀수록 재미나는

수학문제풀이 3

$1+2+3+\cdots+10+11=66$

외국문도서출판사
주체94(2005)년

차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였습니다.

《수재교육에서 중요한것은 과학기술의 토대를 이루는 기초과학교육을 잘하는것입니다. 기초과학교육을 잘하여야 학생들이 최신과학과 첨단기술을 소유할수 있는 과학기술적토대를 튼튼히 닦을수 있습니다.》

(《만경대혁명학원은 주체의 혈통을 이어나갈 핵심골간양성기지이다.》 단행본, 12페지)

사람이 태여나 성장하는 과정 다시말하여 아이들이 정신육체적으로 성장해가는 과정에 주위세계를 옳바로 인식하면서 생활의 첫 걸음마를 떼는데서 또 과학이라는 신비한 세계의 문어구에 첫 발자국을 내짚는데서 첫 안내자는 아마도 수학이라고 해야 할것입니다.

수학이 있음으로 하여 사람은 과학적인 사고능력을 가지고 창조적인 활동을 해나갈수 있는것입니다.

로보트가 대지를 활보하고 인간이 끝없는 우주세계를 정복해나가고있는 오늘의 과학과 기술의 밑바탕에 바로 수학이 놓여있습니다.

수학은 다른 학문과는 달리 마치 어린아이가 말을 배워나가듯이 또 걸음마를 떼듯이 어릴때부터 체계적으로 배워야 공고한것으로 될수 있습니다.

《풀수록 재미나는 소학교수학문제풀이 3》에서는 학생들이 학교에서 배우는 내용과 혼돈하지 않도록 교수요

강체계에 맞추면서도 생활과 관련되는 문제들을 서술하였습니다.

이 책은 도형의 분할과 무이, 면적구하기, 규칙을 찾아 응용문제풀기, 분수, 최대공통약수와 최소공통배수 등에 대한 내용을 23개 절로 구성하고 매 절에 대한 련습문제를 주고 그에 해당한 답 및 풀기방향을 제시해주었습니다.

《풀수록 재미나는 수학문제풀이 3》은 소학교, 중학교학생들뿐아니라 교원들과 학부형들이 참고할수 있으므로 학생들을 교육교양하는데서 학교교육과 가정교육을 결합시킬데 대한 당의 방침을 실현하는데 의의가 있을것입니다.

제1절. 3각형의 등분

임의의 3각형에 선분을 그어 면적이 꼭같은 두 부분으로 가를수 있습니다. 가르는 방법에는 세가지가 있습니다(그림 1－1). 여기서 점 D, E, F는 변 AB, BC, CA의 가운데점입니다.

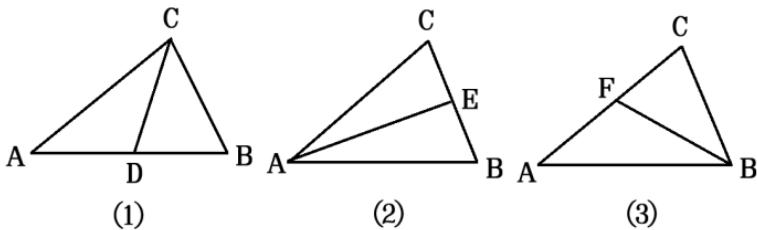
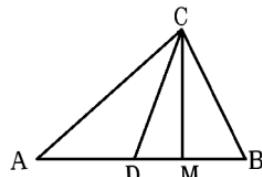



그림 1－1

그림 1－1 (1)에서 선분 CD는 3각형 ABC를 두 부분 즉 3각형 ADC와 3각형 BCD로 갈랐습니다. 점 D가 변 AB의 가운데점이므로 AD=DB입니다. 점 C를 지나며 변 AB에 수직인 선분을 그어 변 AB와 사귀는 점을 M이라고 하면 선분 CM은 3각형 ADC와 3각형 DBC의 높이로 됩니다(그림 1－2).

그림 1－2

3각형의 면적구하기 공식에 의하여

3각형 ADC의 면적=AD×CM÷2

3각형 DBC의 면적=DB×CM÷2

그런데 AD=DB이므로

3각형 ADC의 면적=3각형 DBC의 면적

이 됩니다. 따라서 선분 CD는 3각형 ABC를 면적이 꼭같은 두 부분으로 가릅니다.

마찬가지로 그림 1－1(2), 그림 1－1(3)에서도 선분 AE와 BF는 3각형 ABC를 면적이 꼭같은 두 부분으로 가

릅니다. 이것은 밑변이 같고 높이가 같은 3각형의 면적은 꼭같다는것을 보여줍니다.

실례 1. 임의의 3각형을 면적이 꼭같은 6개의 3각형으로 가르려고 합니다. 어떻게 해야 합니까?

따져보기 1: 밑변이 같고 높이가 같은 3각형의 면적은 같다는 사실에 의하여 주어진 3각형을 밑변이 같고 높이가 같은 6개의 3각형으로 가르면 됩니다. 즉 3각형의 어느 한변을 6등분하고 정점과 그 등분점들을 맺으면 됩니다.

풀기 1. 그림 1－3을 보십시오.

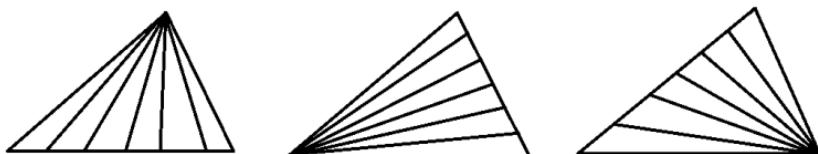



그림 1－3

따져보기 2: 6=1×6=2×3=3×2이므로 1×6은 3각형의 면적을 직접 6개의 작은 3각형으로 가른것으로 볼수 있습니다. 풀기 1과 같이 2×3은 먼저 주어진 3각형을 2몫으로 나눈 다음 다시 매 몫을 3몫으로 나눈것과 같습니다. 또한 3×2는 먼저 주어진 3각형을 3몫으로 나눈 다음 다시 매 몫을 2몫으로 나눈것과 같습니다. 이와 같은 방법에 의하여 등분할 때마다 밑변이 같고 높이가 같은 3각형을 만들면 됩니다.

풀기 2. 그림 1－4, 그림 1－5를 보십시오.

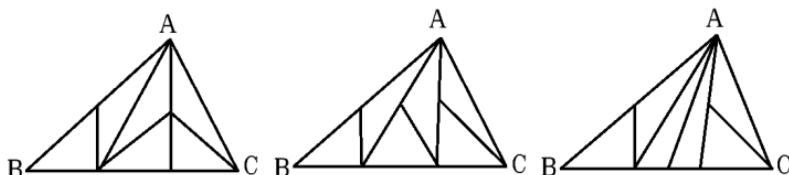



그림 1－4

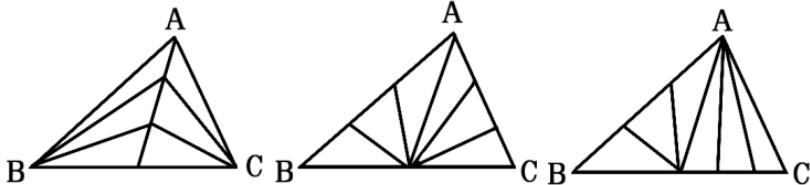



그림 1－5

그림 1－4는 주어진 3각형을 3몫으로 나눈 다음 다시 매 몫을 2몫으로 나눈것이고 그림 1－5는 주어진 3각형을 2몫으로 나눈 다음 매 몫을 3몫으로 나눈것입니다.

따져보기 3: 6=1+5=2+4=3+3이므로 먼저 주어진 3각형을 $\frac{1}{6}$로 나눈 다음 나머지 $\frac{5}{6}$를 5몫으로 나누면 됩니다. 또는 주어진 3각형을 2개의 $\frac{1}{6}$로 나눈 다음 나머지 $\frac{4}{6}$를 4몫으로 나누거나 주어진 3각형을 3개의 $\frac{1}{6}$로 나눈 다음 나머지 $\frac{3}{6}$을 3몫으로 나누면 됩니다.

풀기 3. 그림 1－6을 보십시오.

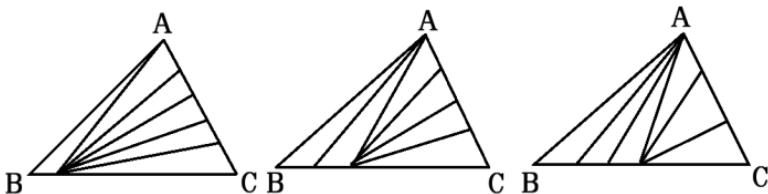



그림 1－6

실례 1에서 본 3각형을 6등분하는 몇가지 방법들에는 한가지 공통점이 있습니다. 즉 밑변이 같고 높이가 같은 3각형을 만든다는것입니다. 이러한 3각형을 만들 때 어떤 선분을 몇개로 나누어야겠는가를 알면 3각형을 면적이 같은 몇개 부분으로 나누는 문제는 쉽게 풀립니다.

만일 두 3각형의 밑변이 같고 높이가 다르다면 그것들의 면적사이에 어떤 관계가 있는가를 봅시다. 실례를 들어 밑변의 길이가 10cm인 두 3각형 ABC와 DEF가 있는데 3각형 ABC의 높이는 9cm이고 3각형 DEF의 높이는 27cm입니다. 3각형의 면적구하는 공식에 의하여 3각형 DEF의 면적은 3각형 ABC의 면적의 3배 즉 3각형 ABC와 3각형 DEF의 면적비는 $\frac{1}{3}$이라는것을 알수 있습니다. 또한 밑변의 길이가 각각 10cm인 3각형 ABC와 3각형 DEF에서 3각형 ABC의 높이가 8cm이고 3각형 DEF의 높이가 18cm이면 3각형 ABC와 3각형 DEF의 면적비는 $\frac{4}{9}$가 됩니다. 이로부터 두 3각형의 밑변의 길이가 같고 높이가 다르면 그것들의 면적비는 이 두 3각형의 높이의 비와 같다는것을 알수 있습니다.

마찬가지로 두 3각형의 높이가 같고 밑변의 길이가 다르면 이 두 3각형의 면적비는 그것들의 밑변의 길이의 비와 같습니다. 그러므로 다음과 같은 결론이 얻어집니다.

두 3각형의 밑변(높이)의 길이가 같고 높이(밑변)가 다르면 그것들의 면적비는 그것들의 높이(밑변)의 비와 같습니다.

실례 2. 3각형 ABC를 a, b, c의 세 부분으로 갈라 a의 면적이 b의 3배로 되고 c가 b의 4배로 되게 하십시오.

따져보기 3각형 a의 면적이 3각형 b의 면적의 3배로 되게 하려면 이 두 3각형의 높이는 같으면서 3각형 a의 밑변의 길이가 3각형 b의 밑변의 길이의 3배로 되게 하면 됩니다. 꼭같이 3각형 c의 높이와 3각형 b의 높이가 같고 3각형 c의 높이가 3각형 b의 높이의 4배로 되게 하면 됩니다. 이 3각형 ABC의 한변을 (3+1+4)=8묶으로 나누고 3각형 b가 그가운데서 1묶을 차지하고 3각형 a가 3묶을, 3각형 c가 4묶을 차지하게 하면 됩니다.

풀기 그림 1－7을 보십시오.

실례 3. 그림 1－8에 있는 3각형 ABC에서 DC=2BD, CE=3AE입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 $20cm^2$입니다. 3각형 ABC의 면적을 구하십시오.

그림 1 － 7

그림 1 － 8

따져보기 주어진 조건 DC=2BD에 의하여 먼저 3각형 ABC를 3각형 ABD와 3각형 ADC의 두 부분으로 가릅시다. 이 두 3각형의 높이는 같고 밑변의 길이가 다릅니다. 또한 CE=3AE에 의하여 3각형 ADC를 3각형 ADE와 3각형 DCE의 두 부분으로 가를수 있습니다. 이 두 3각형도 높이가 같고 밑변의 길이가 다릅니다. 두 3각형의 높이가 같으므로 이 두 3각형의 면적비는 그것들의 밑변의 길이의 비와 같다는 결론에 의하여 3각형 ABC의 면적을 구할수 있습니다.

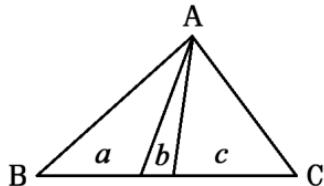
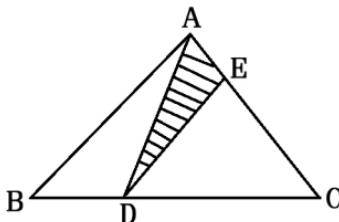
풀기 3각형 ADE와 3각형 DCE에서 CE=3AE 즉 3각형 DCE의 밑변은 3각형 ACE의 밑변의 3배이고 이 두 3각형의 높이가 같으므로 3각형 DCE의 면적은 3각형 ADE의 면적의 3배입니다.

즉 3각형 DCE의 면적=

=3각형 ADE의 면적$\times 3=20\times 3=60(cm^2)$

입니다.

꼭같이 3각형 ADB와 3각형 ADC에서 DC=2BD이고 이 두 3각형의 높이가 같으므로 3각형 ADB의 면적은 3각형 ADC의 면적의 $\frac{1}{2}$입니다. 즉

3각형 ADB의 면적=3각형 ADC의 면적$\times\frac{1}{2}$=

$=(3$각형 ADE의 면적$+3$각형 DCE의 면적$)\times\frac{1}{2}$

$=(20+60)\times\frac{1}{2}$

$=40(cm^2)$

입니다. 그러므로

3각형 ABC의 면적=3각형 ABD의 면적+3각형 ADC의 면적
=3각형 ABD의 면적+3각형 ADE의 면적+3각형 DCE의 면적=40+20+60
=120(cm^2)

입니다.

답. 3각형 ABC의 면적은 120cm^2입니다.

실례 4. 그림 1−9에서 3각형 BCO의 면적은 36cm^2이고 OB=3OD입니다. 제형 ABCD의 면적을 구하십시오.

그림 1 − 9

따져보기 제형 ABCD의 두 밑변과 높이를 알지 못하므로 면적구하기 공식을 쓸수 없습니다. 주어진 3각형의 면적에 의하여 제형에 있는 4개 3각형의 면적을 구할수 있습니다.

풀기 OB=3OD이므로 3각형 BOC의 면적은 3각형 CDO의 면적의 3배입니다.

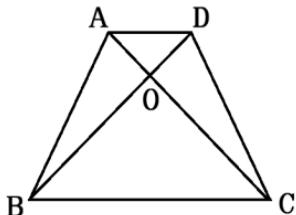
3각형 CDO의 면적$=36\div3=12(cm^2)$

3각형 ABC와 3각형 BCD는 밑변이 같고 높이가 같으므로 면적도 같습니다. 따라서 3각형 ABO와 3각형 OCD의 면적도 같고 12cm^2라는것을 알수 있습니다.

꼭같이 3각형 ABO의 면적은 3각형 AOD의 면적의 3배이므로

3각형 AOD의 면적$=12\div3=4(cm^2)$

입니다. 따라서

제형 ABCD의 면적$=36+12+12+4=64(cm^2)$

입니다.

답. 제형 ABCD의 면적은 $64cm^2$입니다.

련습 1

1. 그림 1－10에서 CD는 AC의 $\frac{2}{7}$이고 점 E는 BC의 가운데점입니다. 3각형 ABC의 면적을 7등분할수 있습니까?

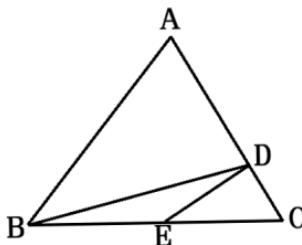



그림 1 － 10

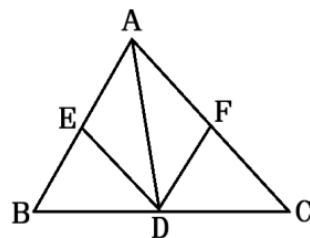



그림 1 － 11

2. 그림 1－11에서 점 D, E, F는 변 BC, AB, AC의 가운데점입니다. 선분 AD, DE, DF는 3각형 ABC를 면적이 같은 4개의 3각형으로 나눕니다. 그 원인을 설명하십시오.

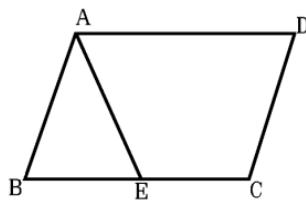



그림 1 － 12

3. 그림 1－12에서 ABCD는 평행4변형이고 점 E는 변 BC의 가운데점입니다. 평행4변형 ABCD의 면적은 3각형 ABE의 면적보다 몇배 더 큽니까?

4. 그림 1 － 13에서 3각형 ABC를 ①, ②의 두 부분으로 나누었습니다. ②는 M, N의 두 부분으로 이루어졌습니다. ①과 ②의 면적비는 얼마입니까?

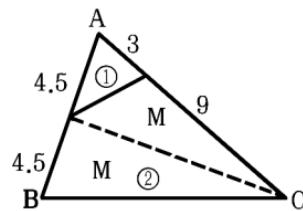



그림 1 － 13

5. 그림 1－14에서 3각형 ABC의 면적은 84cm^{2}이고 AB=4DB, CE=2EB입니다. 3각형 ADE의 면적을 구하십시오.

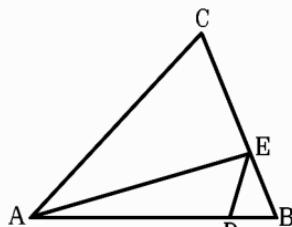



그림 1 － 14

답 및 풀기방향

1. 그림 1－15를 보십시오.
2. 밑변이 같고 높이가 같은 3각형의 면적은 같다는 결론을 리용하여 설명할수 있습니다.
3. 3배 더 많습니다.
4. $\frac{1}{7}$
5. 21cm^2

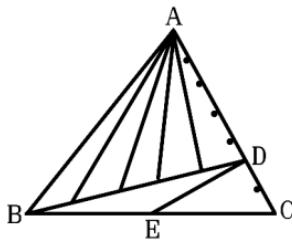



그림 1 － 15

제2절. 도형의 부분과 전체

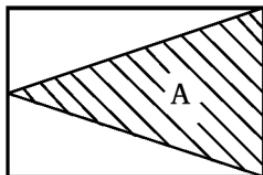
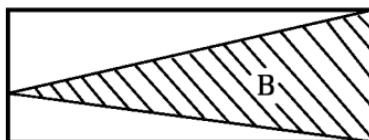
그림 2－1 (1), (2)는 면적이 꼭같은 직4각형입니다.

(1)

(2)

그림 2－1

그림에서 빗선을 친 부분의 면적 A와 B를 구해봅시다.

3각형의 면적구하기 공식에 의하여 그림 2－1(1)의 빗선을 친 부분의 면적은

A=밑변×높이÷2
=직4각형의 너비×직4각형의 길이÷2
=직4각형면적의 절반

입니다.

같은 방법으로 그림 2－1(2)에서 빗선을 친 부분의 면적 B도 직4각형면적의 절반이라는것을 알수 있습니다.

두 직4각형의 면적은 같으므로 빗선을 친 부분의 면적 A와 B도 같습니다. 이 문제를 푸는데서 직4각형이라는 전체 면적과 3각형이라는 부분면적사이의 관계를 리용하였습니다.

실례 1. 그림 2－2에서 빗선을 친 부분의 면적과 직4각형 ABCD의 비는 얼마입니까?

따져보기 빗선을 친 부분은 다각형이며 직4각형 ABCD는 면적이 같은 20개의 직4각형으로 이루어졌습니다.

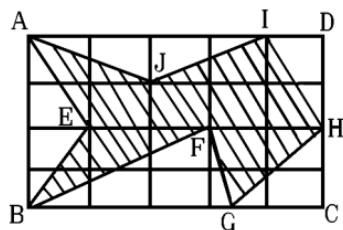
그림 2 － 2

풀기 작은 직4각형의 면적을 1cm^{2}라고 하면 직4각형 ABCD의 면적은 20cm^{2}로 되며 빗선을 치지 않은 부분의 면적은 다음과 같이 됩니다.

3각형 ABE의 면적=4÷2=2(cm^2) (4개의 작은 직4각형 면적의 절반)

3각형 AJI의 면적=4÷2=2(cm^2) (4개의 작은 직4각형면적의 절반)

3각형 IHD의 면적=2÷2=1(cm^2) (2개의 작은 직4각형면적의 절반)

점 G는 직4각형의 정점우의 점이 아니므로 3각형 BGF와 3각형 GCH의 면적을 따로따로 계산하기 어렵습니

다. 이 두 3각형의 높이가 같고 (2개의 작은 직4각형의 너비) 밑변의 합은 5개의 작은 직4각형의 길이이므로 그것들의 면적합은 $10\div2=5(\text{cm}^2)$(10개의 작은 직4각형면적의 절반)입니다. 따라서

빗선을 친 부분의 면적$=20-(2+2+1+5)=10(\text{cm}^2)$

입니다.

답. 빗선을 친 부분의 면적은 전체 면적의 $\frac{1}{2}$입니다.

실례 2. 그림 2-3과 같이 한변의 길이가 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm인 5개의 바른4각형이 있습니다. 빗선을 친 부분의 면적과 빗선을 치지 않은 부분의 면적비는 얼마입니까?

그림 2 - 3

따져보기 주어진 조건에 의하여 빗선을 친 부분의 면적과 빗선을 치지 않은 부분의 면적을 갈라서 계산할수 있습니다.

풀기 먼저 빗선을 치지 않은 부분의 면적을 구합시다.

빗선을 치지 않은 부분의 면적$=(4\times4-3\times3)+$
$+(2\times2-1\times1)=10(\text{cm}^2)$

다음 빗선을 친 부분의 면적을 구합니다.

빗선을 친 부분의 면적$=5\times5-10=15(\text{cm}^2)$

따라서 빗선을 친 부분의 면적과 빗선을 치지 않은 부분의 면적비는 15:10 즉 3:2입니다.

답. 3:2

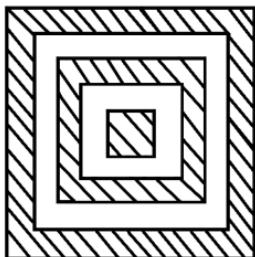
실례 3. 바른3각형 ABC의 매 변을 8등분하여 그림 2-4와 같은 3각형모양의 그물을 그립니다. 작은 3각형의 면적이 모두 1cm^2이면 그림에서 굵은선으로 표시한 3각형의 면적은 얼마입니까?

따져보기 3각형의 면적을 직접 구하기는 힘듭니다. 3각형 ABC를 계산하기 쉬운 몇개의 도형으로 갈라서 매 도형의 면적만 구하면 도형의 총면적은 쉽게 얻어집니다.

그림 2－4

풀기 1: 도형의 면적을 계산하기 위하여 3각형을 그림 2－5와 같이 4개의 3각형으로 가릅니다.

그림 2－5

평행4변형의 한 대각선은 평행4변형의 면적을 꼭같은 2개 부분으로 가르므로 3각형 ①은 8개의 작은 3각형으로 된 평행4변형 면적의 절반 즉 그것의 면적은 4cm^{2}입니다.

3각형 ②는 16개의 작은 3각형으로 된 평행4변형면적의 절반 즉 그것의 면적은 8cm^{2}입니다.

3각형 ③은 10개의 작은 3각형으로 된 평행4변형면적의 절반 즉 그것의 면적은 5cm^{2}입니다.

3각형 ④는 9개의 작은 3각형으로 되여있으므로 그것의 면적은 9cm^{2}입니다.

따라서 구하려는 3각형의 면적은 4+8+5+9=26(cm^2)입니다.

풀기 2: 굵은선으로 표시한 3각형은 제형 ABCD에서 3개의 3각형을 덜어낸것으로 볼수 있습니다(그림 2－6). 따라서 구하려는 3각형의 면적은

그림 2－6

$$(3+5+7+9+11+13)-8\div 2-24\div 2-12\div 2$$
$$=48-4-12-6=26(\text{cm}^2)$$

가 됩니다.

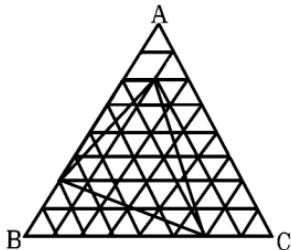
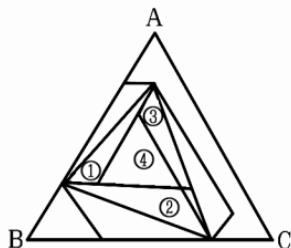
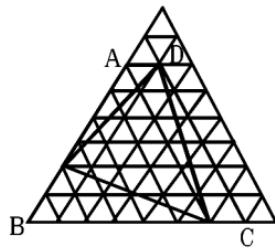
[설명]

이 실례를 통하여 알수 있는바와 같이 어떤 도형의 면적을 계산하려 할 때 직접 계산하기 힘들면 구하려는 도형의 면적을 계산하기 쉽게 몇개의 도형으로 갈라서 계산할수 있습니다. 어떤때는 구하려는 도형을 어떤 큰 도형에서 몇개의 작은 도형을 덜어내는 방법으로 계산하는것이 편리할 때도 있습니다.

그림 2 − 7

실례 4. 바른3각형의 매 변을 3등분하고 3등분한 가운데선분을 한 변으로 하는 바른3각형을 바깥쪽에 그리면 6각형이 얻어집니다. 다시 이 6각형의 6개 《각》(작은 바른3각형)의 두변을 3등분하고 또 3등분한 가운데선분을 한변으로 하는 바른3각형을 바깥쪽에 그리면 그림 2−7이 얻어집니다.

이때 제일 작은 바른3각형의 면적을 $1cm^2$라고 하면 전체도형의 면적은 얼마입니까?

그림 2 − 8

따져보기 이 문제에는 제일 큰것, 중간의것, 제일 작은것의 세가지 바른3각형이 있습니다(그림 2−8). 제일 작은 3각형을 1몫으로 보고 전체3각형을 분할하면 모두 몇몫인가를 계산할수 있습니다.

풀기 그림 2−9에서 알수 있는바와 같이 제일 큰 바른3각형을 9개의 중간 크기의 바른3각형으로 가를수 있습니다. 또 중간크기의 바른3각형을 9개의 제일 작은 바른3각형

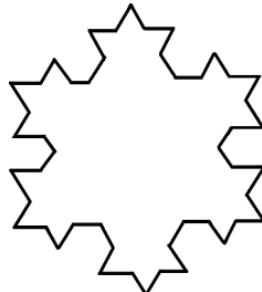
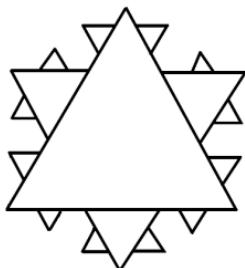
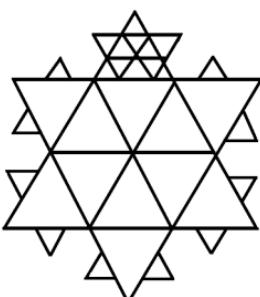



그림 2 − 9

으로 가를수 있습니다. 그러므로 제일 큰 바른3각형 1개에는 (9×9=)81개의 제일 작은 바른3각형이 들어있습니다.

그림 2−9에는 1개의 제일 큰 바른3각형외에 3개의 중간크기의 바른3각형과 12개의 제일 작은 바른3각형이 들어있습니다. 따라서 이 도형에는

$$81+3\times 9+12=120(\text{개})$$

의 제일 작은 바른3각형이 들어있습니다.

답. 120cm^2

련습 2

1. 그림 2−10의 빗선을 친 A와 B의 면적중에서 어느것이 더 큽니까?
2. 그림 2−11, 그림 2−12, 그림 2−13에서 빗선을 친 부분의 면적과 총면적의 비는 얼마입니까?

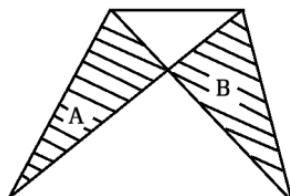
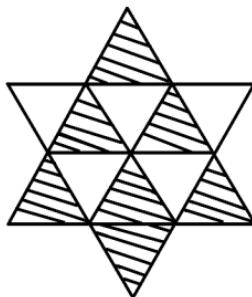
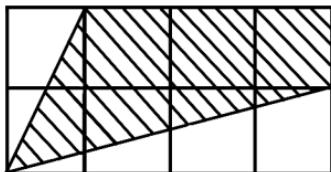
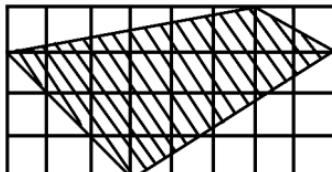



그림 2 − 10 그림 2 − 11 그림 2 − 12 그림 2 − 13

3. 그림 2－14에서 큰 바른4각형의 한변의 길이는 3cm이고 작은 바른4각형의 한변의 길이는 2cm입니다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하십시오.

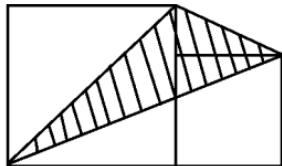



그림 2 － 14

4. 바른3각형 ABC의 매 변을 6등분하여 그림 2－15와 같은 3각형모양의 그물을 만들었습니다. 만일 작은 3각형의 면적이 모두 $1cm^2$ 라면 3각형 DEF의 면적은 얼마입니까?

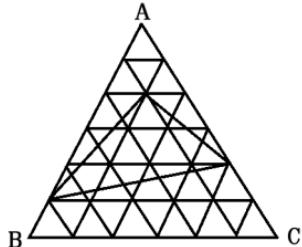



그림 2 － 15

답 및 풀기방향

1. 면적은 같습니다. 2. $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$ 3. $4.5cm^2$

4. $12cm^2$

제3절. 도형의 분할

학교에 바른4각형모양의 교재림이 있습니다. 교재림속에 12대의 수삼나무가 있습니다. 이 교재림을 4개 뙈기로 갈라서 4개 학급이 한뙈기씩 관리하게 하려고 합니다. 매 뙈기의 면적이 같아야 하며 매 뙈기에 3대의 수삼나무가 들어가게 하려고 합니다. 어떻게 가르면 됩니까? 수학선생님은 이 문제를 학생들에게 주면서 풀어보라고 하였습니다. 학생들은 이 문제를 그림과 같은 두가지 방법으

로 풀었습니다. 어떤 방법으로 분할하였는가는 실례를 들어봅시다.

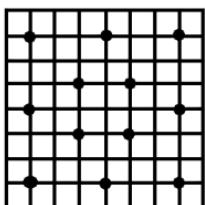
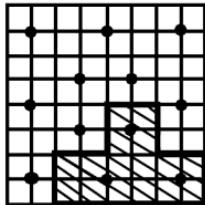



그림 3 – 1　　　　그림 3 – 2

실례 1. 그림 3−3의 바른4각형을 모양과 크기가 꼭같은 네쪼각으로 가르되 매 쪼각안에 수 1, 2, 3, 4가 포함되게 하십시오.

그림 3 – 3

따져보기 바른4각형을 네쪼각으로 가르려면 가운데점을 중심으로 대칭이 되게 갈라야 합니다. 한가지 모양과 크기만 찾으면 가운데점을 중심으로 90°만큼 회전시키면 두번째 쪼각이 얻어집니다. 이런 방법으로 90°씩 회전시키면 세번째, 네번째 쪼각이 얻어집니다.

먼저 첫번째 쪼각을 구해봅시다. 매 쪼각에 수 1, 2, 3, 4가 포함되여야 하므로 같은 두 수는 갈라놓아야 합니다. 두 수가 나란히 있는 수 4부터 갈라봅니다. 2개의 《4》사이에 가름선을 그어 가른 다음 그것을 가운데점을 중심으로 90°, 180°, 270°씩 돌리면 다른 3개의 가름선이 얻어집니다(그림 3−4). 이와 같은 방법으로 모든 가름선을 그을수 있습니다(그림 3−5).

가운데있는 4개의 칸은 갈라져서 4개의 쪼각에 속해야 하며 두 칸이 동시에 한개 쪼각에 속하지 말아야 합니다. 그러므로 반드시 갈라놓아야 합니다.이 바른4각형의 면적은 (8×8=)64개의 작은 바른4각형이므로 갈라놓은 다

그림 3 - 4

그림 3 - 5

음 매 쪼각의 면적은 16개의 작은 바른4각형이 되여야 합니다. 그림 3−5에 기초하여 제일 안쪽층부터 가름선에 따라 가르면 쉽게 답이 얻어집니다.

풀기 가르기방법은 그림 3−6과 같습니다.

그림 3 - 6

그림에서 검은색인 두 쪼각과 흰색인 두 쪼각은 모두 모양과 크기가 같으며 매 쪼각에는 수 1, 2, 3, 4가 포함되여있습니다.

실례 2. 그림 3−7을 모양이 같고 면적이 같은 두 부분으로 가르려면 어떻게 해야 합니까?

그림 3 - 7

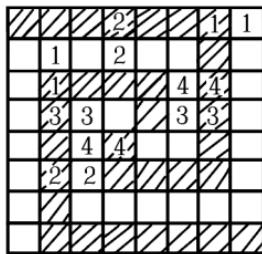
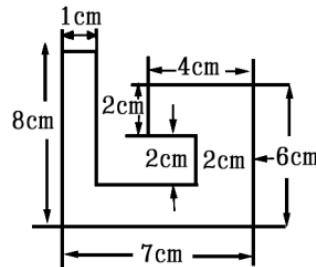
따져보기 계산과 가르기에 편리하도록 하기 위하여 도형을 $1cm^2$인 바른4각형으로 가릅니다(그림 3−8). 그림에서 보는바와 같이 도형의 면적은 $32cm^2$이고 매 부분의 면적은 $16cm^2$여야 합니다. 제일 긴 변의 길이가 8cm이고 그 다음 긴 변의 길이는 7cm입니다. 따라서 매 부분의 제일 긴 변의 길이가 7cm임을 알수 있습니다. 이것을 빗선과 점으로 표시하였습니다.

풀기 가르기방법은 그림 3−9와 같습니다. 그림에서 빗선을 친 부분과 흰색부분은 모양도 같고 면적도 같습니다.

그림 3 − 8

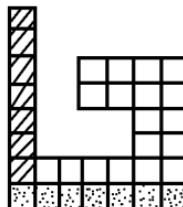
그림 3 − 9

실례 3. 그림 3−10에 1개의 선분을 그어 모양이 같고 면적도 같은 두 부분으로 가르십시오.

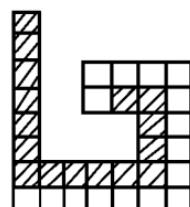
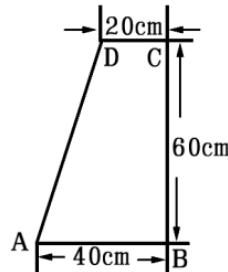
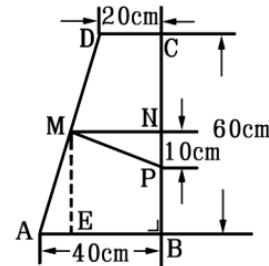
그림 3 − 10

따져보기 면적을 계산하면

제형의 면적 $=(20+40)\times 60\div 2=$
$=1,800(cm^2)$

이므로 도형을 두 부분으로 가르면 매 부분의 면적은 $900cm^2$가 되여야 합니다. 선분 MN을 제형의 중간선이라고 하면 $MN=(20+40)\div 2=30(cm)$가 됩니다. 제형 ABMN과 MNCD의 면적은 각각 $1,050cm^2$, $750cm^2$입니다. 이 두 면적의 차가 $300cm^2$이므로 작은 면적에 $150cm^2$를 더해주고 큰 면적에서 $150cm^2$를 덜어야 합니다. MN=30cm이므로 높이가 MN이고 면적이 $150cm^2$인 3각형을 만들어야 합니다. 높이가 MN이고 면적이 $150cm^2$가 되는 3각형 MPN을 그립시다. NP=10cm되게 변 NB우에 점 P를 찍습니다. 그러면 MP는 제형 ABCD를 면적이 같은 두 부분으로 가르는 1개의 선분으로 됩니다.

그림 3 − 11

풀기 MP에 의하여 제형 ABCD는 면적이 같은 두 부분으로 갈라집니다. 이제 이 두 부분의 모양이 같다는것을 설명하면 이 문제는 풀립니다. 4각형 ABPM에서 점 M을 지나며 변 AB에 수직인 선분 ME를 그리면 ME

는 4각형 ABPM을 두 부분으로 가릅니다(그림 3－11). 즉 직3각형 AEM과 제형 EBPM으로 가릅니다. MN=EB=30cm이므로 AE=10cm입니다. 또한 ME=NB=30cm이므로 직3각형 AEM과 MPN은 같은 3각형입니다. 같은 방법으로 DC=BP=20cm, CN=EB=30cm, MN=ME=30cm이므로 제형 CDMN과 EBPM도 같은 제형이라는것을 알수 있습니다. 따라서 두 도형의 모양은 같습니다.

답. 4각형 CDMP와 MABP의 모양과 면적은 같습니다.

실례 4. 바른6각형안에 점 A를 지나는 2개의 선분을 그어 면적이 같은 3개의 부분으로 가르십시오(그림 3－12).

그림 3 － 12

따져보기 선분 CF, BE, AD는 한 점 O에서 사귑니다. CF, BE, AD는 바른6각형을 면적이 같은 6개의 3각형으로 가릅니다. 그러므로 점 A를 지나는 2개의 선분을 그으면 매 부분의 면적은 2개의 작은 3각형의 면적의 합과 같습니다.

변 CD, DE의 가운데 점 M, N을 지나는 직선 AM, AN을 그으면 4각형 ABCM과 4각형 ANEF의 면적과 모양은 같습니다(그림 3－13). 그러므로 4각형 AMDN의 면적이 3개의 선분 CF, BE, AD가 만드는 6개의 3각형중 2개의 3각형과 같다는것을 설명하면 됩니다. OM, ON을 맺으면 밑변과 높이가 같은 3각형은 면적이 같다는 결론에 의하여 3각형 AMO, OMD, ODN, ONA의 면적이 같다는것을 알수 있습니다. 이 면적들은 3각형 OCD면적의 절반입니다. 그러므로 4각형 AMDN의 면적은 2개의 작은 3각형의 면적의 합과 같습니다.

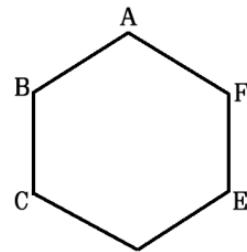
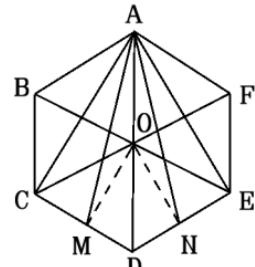



그림 3 － 13

풀기 가르기방법은 그림 3－14와 같습니다. 여기서 점 M, N은 변 CD, DE의 가운데점입니다.

이로부터 도형의 분할은 먼저 면적계산부터 하고 도형의 모양이 같다는것을 밝혀야 한다는것을 알수 있습니다.

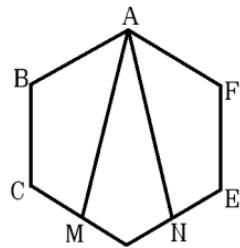



그림 3 － 14

련습 3

1. 그림 3－15를 모양은 같으나 직4각형이 아닌
(1) 6개 (2) 8개
도형으로 가르십시오.

2. 그림 3－16을 모양이 같고 면적이 같은 4개 부분으로 가르되 매 부분에 검은점이 1개씩 들어가게 하십시오.

그림 3 － 15 그림 3 － 16

3. 그림 3－17은 《H》자 모양의 땅이며 땅에 8대의 나무가 서있습니다. 이 땅을 면적이 같고 모양이 같은 몇개의 부분으로 가르되 매 부분에 2대의 나무가 들어가게 하려면 어떻게 갈라야 합니까?

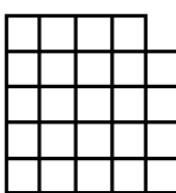
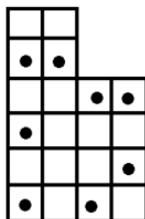
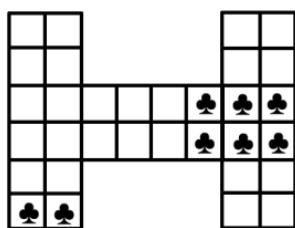



그림 3 － 17

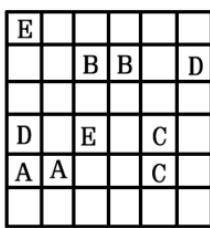



그림 3 － 18

4. 그림 3－18에 있는 바른4각형을 모양과 크기가 모두 같은 2개 부분으로 가르되 매 부분에 5개의 글자 A, B, C, D, E가 포함되게 하려고 합니다. 어떻게 갈라야 합니까?

5. 그림 3－19를 모양도 같고 면적도 같은 4개 부분으로 가르려면 어떻게 해야 합니까?(적어도 서로 다른 4가지 가르기방법을 찾으십시오. 이때 얻어지는 4가지도형이 모두 달라야 합니다.)

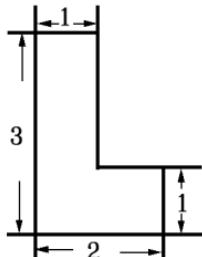



그림 3 － 19

답 및 풀기방향

1. (1) 그림 3－20을 보십시오. (2) 그림 3－21을 보십시오.

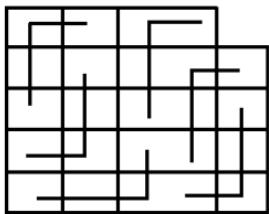



그림 3 － 20

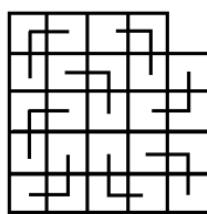



그림 3 － 21

2. 그림 3－22를 보십시오. 3. 그림 3－23을 보십시오.

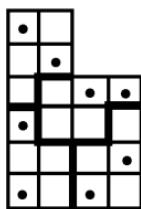



그림 3 － 22

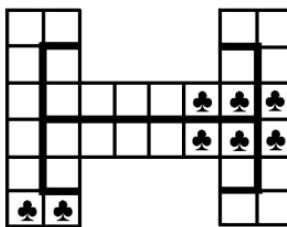



그림 3 － 23

4. 그림 3-24를 보십시오.
가르기방법에는 여러가지가 있습니다.
5. 그림 3-25를 보십시오.

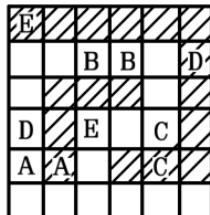



그림 3 - 24

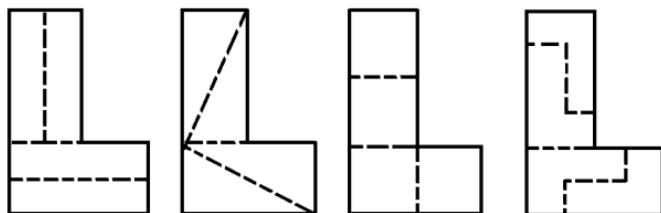



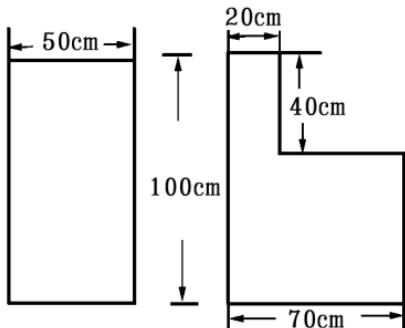
그림 3 - 25

제4절. 도형의 무이

어떤 도형을 꼭같은 몇개로 분할한 다음 다시 그것을 무어서 새 도형을 만드는것은 일정한 기교를 요구합니다. 여기서 적지 않은 기교는 계산과정에 그 비결을 찾게 됩니다.

실례 1. 그림 4-1의 두 도형중에서 어느 하나를 세 부분으로 가른 다음 다시 그것을 합쳐서 한개의 바른4각형을 만들어보십시오.

그림 4 - 1

따져보기 바른4각형은 그림 4-1의 두 도형을 합쳐서 만들어야 하므로 바른4각형의 면적은 그림 4-1의 두 도형의 면적을

합친것과 같습니다.

$$100\times50+100\times20+(100-40)\times(70-20)=$$
$$=5{,}000+2{,}000+3{,}000=10{,}000(cm^2)$$

따라서 바른4각형의 한변의 길이는 100cm입니다. 그림 4－1에서 두 도형은 모두 한변의 길이가 100cm입니다. 이제 그것들중의 한변을 바른4각형의 한변으로 취합니다.

그림 4 － 2

그림 4－1의 직4각형의 길이는 100cm이고 너비가 50cm 이므로 직4각형이 아닌 도형의 밑변에서 50cm만큼 잘라서(그림 4－2) 직4각형과 합치면 그림 4－3이 얻어집니다. 이때 바른4각형이 되자면 길이 40cm, 너비 30cm인 직4각형이 모자랍니다. 이 직4각형을 보충하기 위하여 그림 4－2 에서 잘라낸 부분을 리용하여야 합니다.

그림 4 － 3

풀기 직4각형이 아닌 부분을 3개 부분으로 가른 다음 그림 4－4, 그림 4－5와 같이 합치면 됩니다.

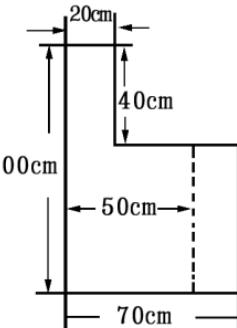
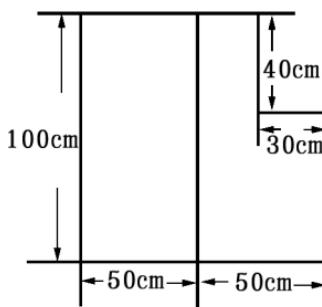
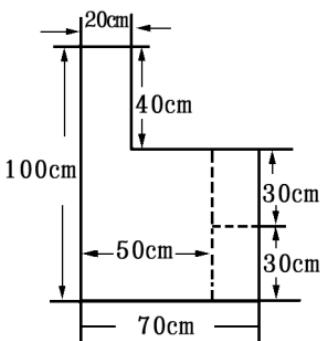



그림 4 － 4

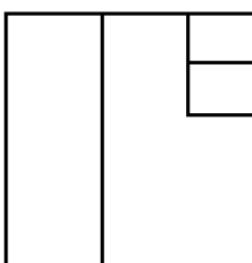



그림 4 － 5

[생각할 문제]

실례 1을 또 다른 방법으로 풀수 없는가를 생각해보십시오.

실례 2. 길이가 24cm, 너비가 15cm인 직4각형이 있습니다. 그것을 두 부분으로 가른 다음 다시 그것을 합쳐서 길이가 20cm, 너비가 15cm인 새로운 직4각형을 만드십시오.

따져보기 본래의 직4각형은 새 직4각형보다 길이가 4cm 더 길고 새 직4각형은 본래의 직4각형보다 너비가 3cm 더 길므로 본래의 직4각형을 30개의 $(4\times3=)12cm^2$인 직4각형으로 가릅니다(그림 4－6).

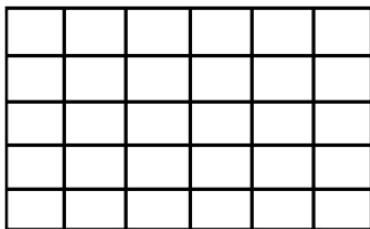



그림 4 － 6

새 직4각형의 길이는 20cm이므로 길이에서 1개의 작은 직4각형을 줄여야 하고 새 직4각형의 너비가 18cm이므로 너비에서 1개의 작은 직4각형을 늘여야 합니다.

대각선방향을 따라 그것을 잘라서 계단모양의 두 부분을 만듭니다. 이때 그 모양과 크기는 완전히 같아야 합니다(그림 4－7). 다음 이것을 붙여서 새 직4각형이 되게 합니다(그림 4－8).

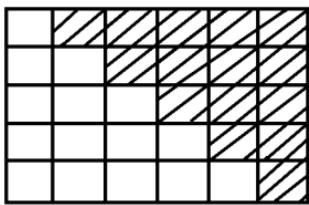



그림 4 － 7

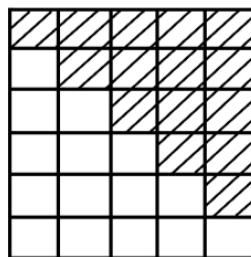



그림 4 － 8

풀기 그림 4－9와 같이 직4각형을 2개로 가른 다음 그림 4－10과 같이 붙이면 새 직4각형이 얻어집니다.

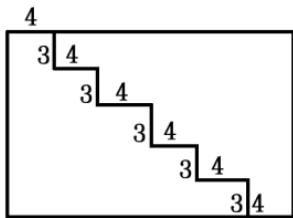



그림 4 － 9

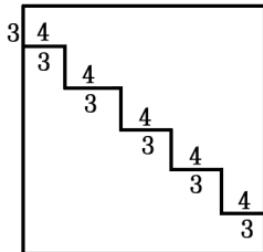



그림 4 － 10

실례 3. 그림 4－11은 크기가 같은 36개의 바른4각형으로 된 S자형의 도형입니다. 그것을 모양과 면적이 같은 4개 부분으로 가른 다음 다시 그것을 붙여서 1개의 바른4각형을 만들수 있습니까? 구체적인 가르기방법과 붙이기방법을 설명하십시오.

그림 4 － 11

따져보기 S자형의 도형은 크기가 같은 36개의 바른4각형으로 되여있으므로 붙이려는 바른4각형의 매 변은 크기가 같은 6개의 바른4각형으로 되여야 합니다. 그림 4－11을 면적이 같은 4개의 부분으로 가릅니다. 이때 매 부분의 면적은 모두 9개의 바른4각형이여야 합니다.

모양을 봅시다. 그림 4－11을 먼저 면적과 모양이 같은 2개 부분으로 가르고 다시 그 중의 1개를 면적과 모양이 같은 2개 부분으로 가를수 있다면 이 문제는 쉽게 풀립니다.

그림 4－11을 먼저 면적이 같고 모양도 같은 2개 도형으로 가릅니다. 그림 4－11의 중간에 있는 제일 긴 변을 자르면 그 중의 1개는 그림 4－12와 같이 됩니다. 다음 그림 4－12를 면적이 같고 모양이 같은 2개 도형으로 가릅니다.

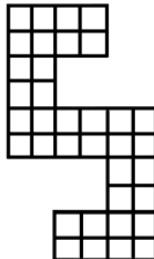
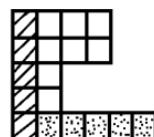



그림 4 － 12

그림 4－12에서 제일 긴변에 바른4각형이 6개 놓이고 그 다음 긴변에는 5개의 바른4각형이 놓여있습니다. 그것을 모양이 같은 2개의 도형으로 가르려면 매 부분의 제일 긴 변에 5개의 바른4각형이 놓여야 합니다. 빗선과 점으로 그것을 표시하였습니다. 이와 같은 방법을 반복하면 그림 4－12는 모양이 같은 두 부분으로 갈라집니다.

풀기 그림 4－13과 같은 4개의 도형이 얻어집니다. 이것을 붙이면 그림 4－14와 같은 바른4각형이 얻어집니다.

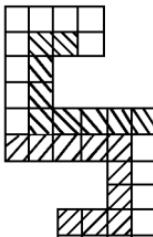



그림 4 － 13

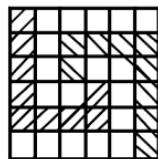



그림 4 － 14

실례 4. 그림 4－15는 한변의 길이가 각각 1cm, 4cm, 8cm인 3개의 바른4각형을 쌓아서 만든 도형입니다. 이 그림을 3개로 가른 다음 그것을 붙여서 1개의 바른4각형을 만드십시오.

그림 4 － 15

따져보기 먼저 만들려는 바른4각형의 면적을 계산합니다. 바른4각형의 면적은

$$1\times1+4\times4+8\times8=81(\mathrm{cm}^2)$$

이므로 만들려는 바른4각형의 한변의 길이는 9cm여야 합니다.

붙이는데 편리하게 하기 위하여 도형을 한변의 길이가 1cm인 바른4각형으로 가릅니다. 한변의 길이가 8cm인 바른4각형을 기준으로 하여 변의 길이를 1cm 늘이면 됩니다. 그러므로 먼저 웃방향에서 길이가 1cm인 바른4각형을 아래쪽방향으로 9개의 바른4각형으로 가르고 한변의 길이가 8cm인 바른4각형의 아래쪽에 붙여줍니다(그림 4－16).

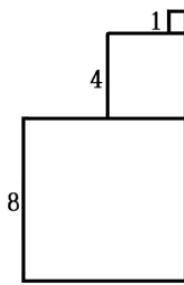
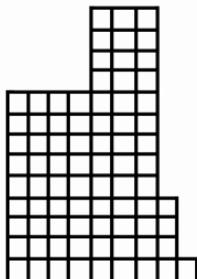



그림 4 － 16

12개의 바른4각형을 아래로 옮겨 바른4각형을 만들어야 합니다. 이제 한번만 가를수 있으므로 12개의 바른4각형사이를 더는 가를수 없습니다. 붙이려는 도형의 《계단》 모양에 의하여 오른쪽웃방향을 따라 그림 4－17과 같이 갈라놓으면 됩니다.

그림 4 － 17

풀기 그림 4－18과 같이 가르고 그림 4－19와 같이 붙이면 됩니다.

그림 4 － 18　　그림 4 － 19

[설명]

도형의 잘라붙이기문제에서 도형을 자세히 관찰하고 계산을 한 다음 문제가 요구하는데 맞게 답을 찾습니다. 이와 같은 숙련은 도형에 대한 직관적감각과 판단능력을 키워주며 도형에 대한 상상력을 키워줍니다.

실례 5. 그림 4－20을 2개로 가른 다음 그것을 붙여서 1개의 바른4각형을 만드십시오(작은 바른4각형의 한변의 길이는 1cm입니다).

그림 4 － 20

따져보기 만들려는 바른4각형의 면적은 16cm^{2}이므로 바른4각형의 한변의 길이는 4cm여야 합니다. 그런데 주어진 직4각형의 길이는 6cm이고 너비는 3cm입니다. 그러므로 자른 다음 오른쪽의것을 왼쪽으로 2cm만큼 평행이동시키고 웃쪽으로 1cm만큼 평행이동시켜야 합니다.

그림 4－21의 굵은선을 따라 2개로 가른 다음 그림 4－22와 같이 붙이면 한변의 길이가 4cm인 바른4각형이 얻어집니다.

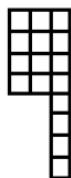
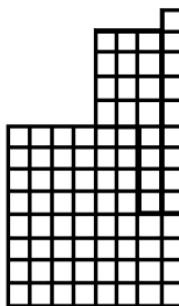
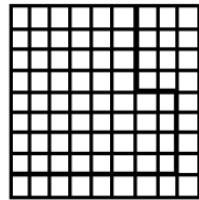
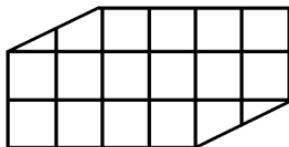
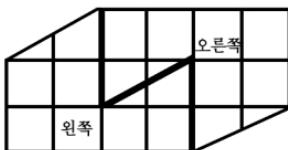



그림 4 – 21

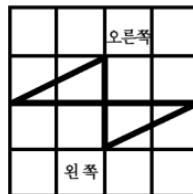



그림 4 – 22

련습 4

1. 길이와 너비가 각각 9cm와 16cm인 직4각형의 종이쪼각을 2개로 자른 다음 그것을 붙여서 1개의 바른4각형을 만드십시오.

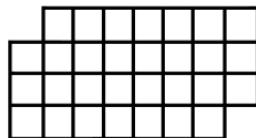



그림 4 – 23

2. 그림 4－23을 2개 부분으로 가른 다음 그것을 붙여서 길이와 너비가 6cm, 5cm인 1개의 직4각형을 만드십시오.
3. 그림 4－24는 나무판자로서 가운데 있는 빗선을 친 부분은 비여있습니다. 크기는 그림에 표시되여있습니다. 그것을 톱으로 잘라서 2개의 부분으로 만든 다음 바른 4각형이 되게 만드십시오.
4. 그림 4－25와 같은 2등변3각형이 있습니다. 그것의 높이는 밑변의 2배입니다. 그것을 3개 부분으로 자른 다음 그것을

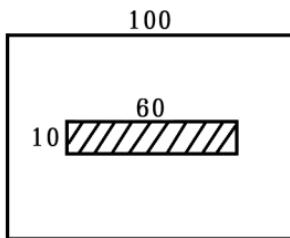



그림 4 – 24

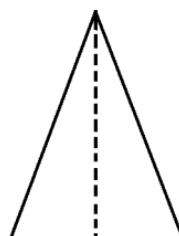



그림 4 – 25

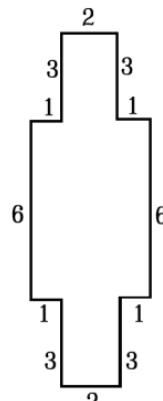



그림 4 – 26

붙여서 바른4각형을 만드십시오.

5. 그림 4－26을 모양과 크기가 같은 4개의 도형으로 가른 다음 그것을 붙여서 바른4각형을 만드십시오.

답 및 풀기방향

1. 그림 4－27을 보십시오.

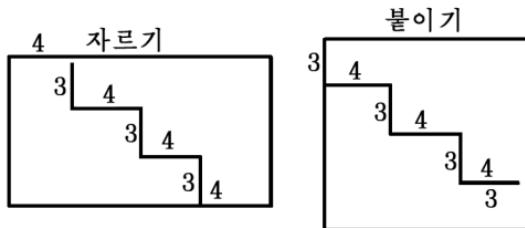



그림 4－27

2. 그림 4－28을 보십시오.

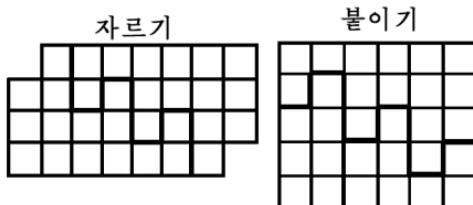



그림 4－28

3. 그림 4－29를 보십시오.

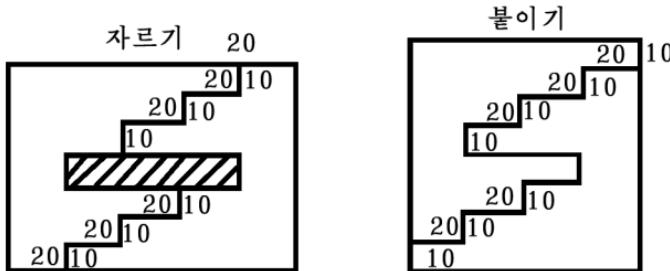



그림 4－29

4. 그림 4—30을 보십시오. 5. 그림 4—31을 보십시오.

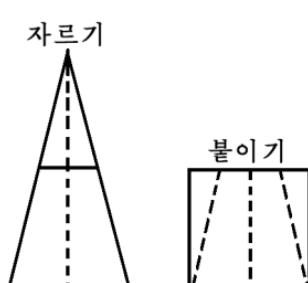



그림 4 – 30

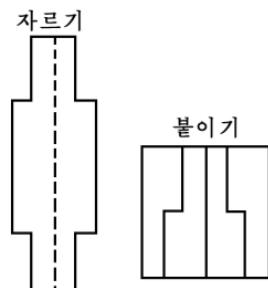



그림 4 – 31

제5절. 그림을 리용하여 면적구하기

그림 5—1은 변의 길이가 각각 3cm, 4cm인 8개의 직3각형을 붙여서 만든 1개의 바른4각형입니다. 이 그림은 오래전부터 《현도》로 불리워왔습니다. 옛날 사람들은 이 현도를 리용하여 피타고라스정리를 증명하였습니다. 《현도》는 크기가 꼭같은 8개의 직4각형을 리용하여 만드는데 꼭같은 4개의 직각을 붙여 만든다고 말할수 있습니다. 《현도》에 있는 크고 작은 바른4각형과 직4각형사이의 관계는 면적문제를 푸는데 필요한 사고방식을 제공해주기도 합니다.

그림 5 – 1

실례 1. 그림 5—2에 2개의 바른4각형이 있습니다. 두 바른4각형사이에 있는 부분의 면적이 $12cm^2$이라

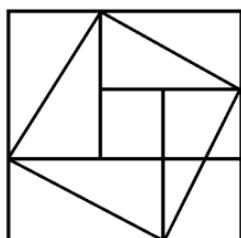
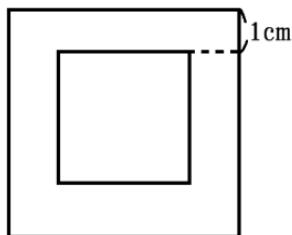



그림 5 – 2

면 큰 바른4각형의 면적은 얼마입니까?

따져보기 큰 바른4각형의 면적을 구하려면 큰 바른4각형 또는 작은 바른4각형의 한변의 길이를 알아야 합니다. 그림 5－2를 그림 5－3과 같이 그립니다.

그림 5 － 3

그림 5－3에서 4개의 직4각형의 모양과 면적은 꼭같습니다. 이 직4각형의 면적은 (12÷4=)3cm²입니다. 직4각형의 너비가 1cm이므로 큰 바른4각형의 한변의 길이는 4cm입니다.

풀기 1: 12÷4=3(cm²) (직4각형의 면적)

3÷1=3(cm) (직4각형의 길이)

3+1=4(cm) (큰 바른4각형의 한변의 길이)

4×4=16(cm²) (큰 바른4각형의 면적)

풀기 2: 그림 5－2에 보조선을 그으면 그림 5－4와 같이 됩니다. 먼저 그림 5－4의 직4각형 A의 면적을 구합니다. 큰 바른4각형의 네 모서리는 모두 한변의 길이가 1cm인 작은 바른4각형이고 나머지 4개의 직4각형은 모양과 면적이 같으므로 A의 면적은

그림 5 － 4

$$(12-1\times4)\div4=2(\text{cm}^2)$$

입니다. 또 직4각형 A의 너비는 1cm이므로 그것의 길이는

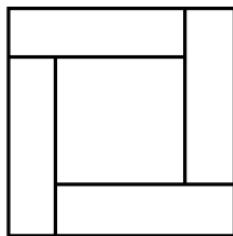
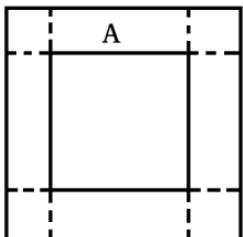
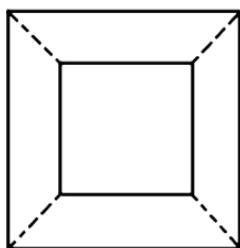
$$2\div1=2(\text{cm})$$

입니다. 큰 바른4각형의 면적은

$$12+2\times2=16(\text{cm}^2)$$

입니다.

그림 5 － 5

풀기 3: 보조선을 그어 그림 5－2를 그림 5－5와 같이 그리면 이때 생

기는 4개의 제형은 모양과 면적이 모두 같으므로 1개 제형의 면적만 구하면 됩니다. 이 제형의 면적은 두 밑변의 합에 높이를 곱하고 2로 나누면 됩니다. 제형의 두 밑변(큰 바른4각형과 작은 바른4각형의 두변)의 합은 6cm이고 큰 바른4각형과 작은 바른4각형의 변의 길이의 차는 2cm이므로 큰 바른4각형의 한변의 길이는 4cm입니다. 따라서 큰 바른4각형의 면적은 $(4\times4=)16\text{cm}^2$입니다.

풀기 4: 그림 5－2에서 작은 바른4각형을 그림 5－6과 같이 이동시킵니다. 그림 5－6에서 두 제형의 면적은 같고 모양도 같으므로 1개 제형의 면적은 $(12\div2=)6\text{cm}^2$입니다. 풀기 3에서처럼 하면 제형의 두 밑변의 합과 차가 각각 6cm, 2cm라는것을 알수 있습니다.

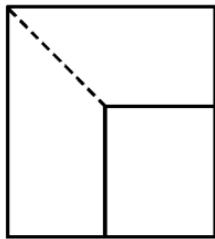
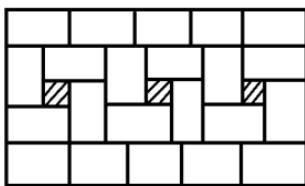
그림 5 － 6

그러므로 큰 바른4각형의 한변의 길이는 4cm이고 면적은 16cm^2입니다.

실례 2. 크기가 같은 22개의 작은 종이쪼각을 붙여서 그림 5－7과 같은 도형을 만들었습니다. 작은 직4각형의 길이는 18cm입니다. 빗선을 친 부분의 면적합을 구하십시오.

그림 5 － 7

따져보기 이 문제는 얼핏 보기에는 풀기방법이 잘 생각나지 않습니다. 그러나 자세히 관찰해보면 가운데 있는 3개 도형의 모양은 같으며 모두 그림 5－3과 비슷한 《현도》라는것을 알수 있습니다. 《현도》의 특성은 작은 직4각형의 길이와 너비의 합이 큰 바른4각형의 한변의 길이이고 작은 직4각형의 길이와 너비의 차가 작은 바른4각형의 한변의 길이라는데 있습니다.

그림 5－7에서 빗선을 친 부분은 바른4각형이므로 한변의 길이만 구하면 됩니다. 작은 바른4각형의 한변의 길이는 직4각형의 길이와 너비의 차인데 작은 직4각형의 변

의 길이가 18cm이므로 그것의 너비만 구하면 됩니다.

직4각형의 너비를 구하기 위하여 그림 5－7을 다시 봅시다. 그림 5－7의 첫줄과 두번째 줄로부터 작은 종이쪼각 5개의 길이는 그것의 3개 길이에 3개 너비를 더한것과 같다는것을 알수 있습니다. 즉 작은 종이쪼각 2개의 길이는 3개의 너비와 같습니다. 2개의 길이는 (18×2=)36cm이므로 너비는 12cm입니다.

풀기: 5개의 작은 종이쪼각의 길이는 작은 종이쪼각 3개의 길이에 3개의 너비를 더한것과 같으므로 3개의 작은 종이쪼각너비는 2개의 작은 종이쪼각의 길이와 같습니다. 작은 종이쪼각의 길이는 18cm이므로 3개의 종이쪼각의 너비는 36cm입니다. 따라서 작은 종이쪼각의 너비는 12cm입니다.

빗선을 친 작은 바른4각형의 한변의 길이는 직4각형의 길이와 너비의 차와 같습니다. 즉 작은 바른4각형의 면적은 (6×6=)36cm^{2}입니다. 빗선을 친 부분의 면적합은 36×3=108 (cm^2)입니다.

실례 3. 바른4각형모양의 나무판자의 웃부분에서 너비가 0.5m인 1개의 직4각형을 오려낸 나머지 직4각형모양의 면적은 5m^{2}입니다. 오려낸 직4각형모양의 나무판자의 면적은 얼마입니까?

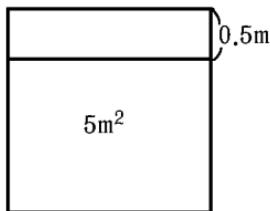



그림 5 － 8

따져보기: 그림을 그리면 그림 5－8과 같습니다.

그림 5－8의 아래부분에 있는 직4각형을 봅시다. 조건에 의하면 그것의 면적은 5m^{2}이고 그것의 길이와 너비의 차는 0.5m입니다. 이제 그림 5－8을 그림 5－9와 같이 만듭니다. 그림 5－9는 큰 바른4각형으로서 그것의 한변의 길이는 직4각형의 길이와 너비의 합과 같고 가운데 있는 작은 바른4각형의 변의 길이는 직4각형의 길이와 너비의 차와 같습니다. 즉 0.5m입니다. 이렇게 하면 작은 바른

4각형의 면적은 $(0.5\times0.5=)0.25m^2$가 되고 따라서 큰 바른4각형의 면적은 $(5\times4+0.25=)$ $20.25m^2$가 됩니다.

그림 5 – 9

$4.5\times4.5=20.25$이므로 큰 바른4각형의 한변의 길이는 4.5m가 됩니다.

이렇게 하여 남아있는 직4각형의 길이와 너비의 합은 4.5m, 길이와 너비의 차는 0.5m라는것을 구하였습니다.

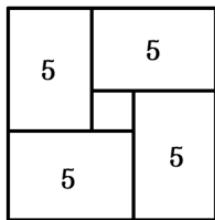
(합+차)÷2=큰 수, (합－차)÷2=작은 수

라는 공식을 리용하여 직4각형의 길이를 구할수 있습니다. 이 길이가 잘라낸 작은 직4각형의 길이입니다. 작은 직4각형의 너비는 0.5m이므로 그것의 면적을 쉽게 구할수 있습니다.

풀기 그림 5－9에서 큰 바른4각형의 면적은 $5\times4+0.5\times0.5=20.25(m^2)$ 입니다.

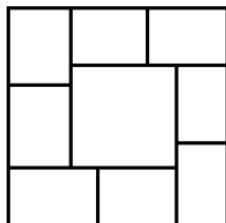
$4.5\times4.5=20.25$이므로 큰 바른4각형의 한변의 길이는 4.5m입니다.

본래의 바른4각형의 한변의 길이는 $(4.5+0.5)\div2=2.5(m)$입니다.

잘라낸 직4각형의 면적은 $2.5\times0.5=1.25(m^2)$ 입니다.

련습 5

1. 꼭같은 직4각형모양의 벽돌을 꽃밭둘레에 바른4각형이 되도록 놓았습니다(그림 5－10). 둘레길이는 264cm이고 그 안에 있는 작은 바른4각형의 면적은 $900m^2$입니다. 직4각형모양의 벽돌의 길이와 너비는 얼마입니까?

그림 5 – 10

2. 길이가 4cm인 38개의 종이쪼각을 붙여서 그림 5－11과 같은 도형을 만들었습니다. 그림에서 빗선을 친 부분의 면적을 구하십

시오.

3. 바른4각형모양의 유리에서 너비가 16cm인 1개의 직4각형모양의 유리판을 잘라낸 나머지 유리판(직4각형)의 면적이 336cm^{2}입니다. 본래의 바른4각형모양의 유리의 면적은 얼마입니까?

그림 5 － 11

4. 바른4각형모양의 꽃밭이 있는데 꽃밭둘레에 너비가 2m인 잔디밭을 만들려고 합니다. 잔디밭면적이 40m^{2}라면 꽃밭의 면적은 얼마입니까?

5. 그림 5－12에 2개의 직4각형이 있습니다. 작은 직4각형의 길이는 너비의 2배입니다. 두 직4각형사이의 거리가 1cm이고 큰 직4각형과 작은 직4각형사이에 있는 부분의 면적은 40cm^{2}입니다. 두 직4각형의 면적은 각각 얼마입니까?

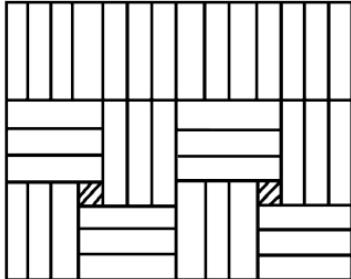
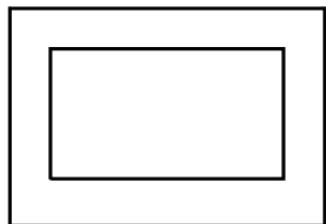



그림 5 － 12

답 및 풀기방향

1. 길이 24cm, 너비 18cm　　2. 2cm^2
3. 784cm^2　　4. 49m^2
5. 작은 직4각형의 면적은 72cm^2, 큰 직4각형의 면적은 112cm^{2}입니다.

제6절. 보조선을 리용하여 면적구하기

신기한 기하세계에서 도형은 매우 다종다양합니다. 기하학의 많은 문제들은 주어진 도형의 선분들에만 의거해서는 문제를 풀기 힘들 때가 많습니다. 이런 경우 주어진 도형에 없는 선분을 그어 풀면 쉽게 풀리는 경우가 있습니다.

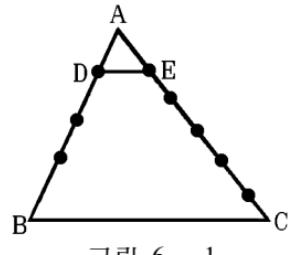
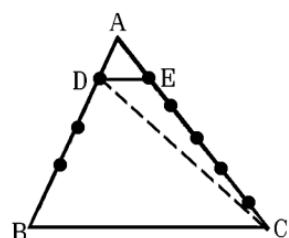
실례 1. 그림 6−1에서 BD=3AD, CE=5AE입니다. 3각형 ABC의 면적은 3각형 ADE의 면적의 몇배입니까?

그림 6 − 1

따져보기 주어진 조건으로부터 3각형의 면적을 직접 구하기는 힘들다는것을 알수 있습니다. 3각형 ADE와 3각형 ABC에서 밑변도 높이도 같지 않으므로 두 면적사이 관계를 찾을수 없습니다. 그러므로 밑변이 같고 높이가 같은 3각형을 그려야 합니다. 3각형의 밑변 또는 높이의 배수관계에 의하여 3각형면적의 배수관계를 찾아야 합니다. BD=3AD, CE=5AE에 의하여 밑변이 각각 BD, AD, CE, AE인 같은 높이를 가지는 3각형을 만들어야 합니다. 이에 의하여 그것들의 면적사이에 어떤 관계가 있는가를 찾아야 합니다. 점 C, D를 맺으면 쉽게 알수 있습니다.

풀기 점 C와 D를 맺으면 그림 6−2가 얻어집니다.

그림 6 − 2

3각형 ADE와 3각형 DCE는 높이가 같은 3각형입니다. CE=5AE이므로 3각형 DCE의 면적은 3각형 ADE의 면적의 5배입니다. 그러므로 3각형 ADC의 면적은 3각형 ADE면적의 (5+1=)6배입니다.

꼭같이 3각형 ADC와 3각형 BCD도 높이가 같은 3각형입니다. BD=3AD이므로 3각형 BCD의 면적은 3각형 ADC면적의 3배입니다. 그러므로 3각형 ABC의 면적은 3각형 ADC면적의 (3+1=)4배입니다. 이상의 두 결론으로부터

$$3각형\ ABC의\ 면적=3각형\ ADE의\ 면적\times(5+1)\times(3+1)$$
$$=3각형\ ADE의\ 면적\times6\times4$$
$$=3각형\ ADE의\ 면적\times24$$

가 얻어집니다.

그러므로 3각형 ABC의 면적은 3각형 ADE면적의 24배입니다.

[설명]

이 실례를 통하여 알수 있는바와 같이 주어진 그림에 없는 선분 CD를 맺음으로써 3각형 ABC와 3각형 ADE를 련관시킬수 있었습니다. 이와 같이 본래의 그림에 없는 선분을 긋는 방법으로 문제를 쉽게 풀었습니다. 이런 선분을 보조선이라고 부르고 점선으로 표시합니다.

실례 2. 그림 6−3에서 3각형 ABC의 면적은 $1cm^2$입니다. AB를 연장하여 AB=BD가 되게 점 D를 찍고 BC를 연장하여 2BC=CE가 되게 점 E를 찍으며 CA를 연장하여 3AC=AF가 되게 점 F를 찍습니다. 3각형 DEF의 면적을 구하십시오.

그림 6 − 3

따져보기 이 문제에서 3각형 DEF의 면적을 직접 구하기는 힘듭니다. 그러므로 3각형 ABC의 면적과의 관계를 찾아야 합니다. BD=AB, CE=2BC, AF=3AC에 의하여 밑변이 BD, CE, AF인 3각형과 3각형 ABC는 같은 높이를 가집니다. CD, AE를 맺으

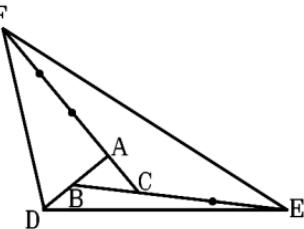
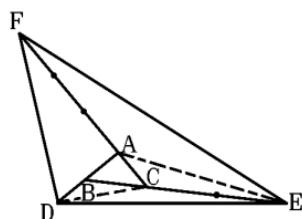



그림 6 − 4

면 매 3각형과 3각형 ABC의 면적사이의 관계를 리용하여 3각형 DEF의 면적을 구할수 있습니다(그림 6−4).

풀기 CD, AE를 맺습니다.

3각형 ABC와 3각형 BDC의 공통점이 C이고 AB=BD 이므로

3각형 BDC의 면적=3각형 ABC의 면적=1(cm²)

가 됩니다.

3각형 ABC와 3각형 ACE의 공통점이 A이고 CE=2BC 이므로

3각형 ACE의 면적=2×3각형 ABC의 면적
=2×1=2(cm²)

가 됩니다.

3각형 ACE와 3각형 AEF의 공통점은 E이고 AF=3AC 이므로

3각형 AEF의 면적=3×3각형 ACE의 면적
=3×2=6(cm²)

입니다.

3각형 ADC와 3각형 AFD의 공통점이 D이고 AF=3AC 이므로

3각형 AFD의 면적=3×3각형 ADC의 면적
=3×(1+1)=6(cm²)

입니다.

3각형 BDC와 3각형 CDE의 공통점이 D이고 CE=2BC 이므로

3각형 CDE의 면적=2×3각형 BDC의 면적
=2×1=2(cm²)

이므로

3각형 DEF의 면적=1+2+2+6+6+1=5+13=18(cm²)

입니다.

[설명]

이 문제에서 보조선은 CD와 AE뿐아니라 BF와 CD(또는 AE)를 보조선으로 하여 풀수도 있습니다.

실례 3. 그림 6－5에서 4각형 ABCD의 대각선 AC와 BD는 점 E에서 사귀고 점 F, G는 AC, BD의 연장선우의 점이고 CF=AE, DG=BE입니다. 4각형 ABCD의 면적이 10cm^2이면 3각형 EFG의 면적은 얼마입니까?

그림 6 － 5

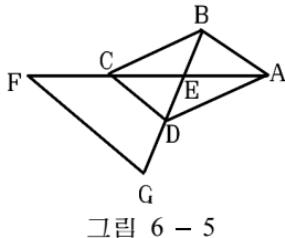
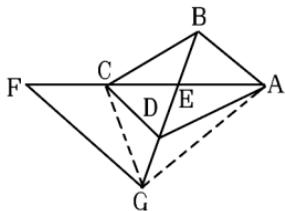
따져보기 이 문제에서는 3각형 EFG와 4각형 ABCD사이의 관계를 밝혀야 합니다. 3각형 CDE는 3각형 EFG와 4각형 ABCD의 공통부분이므로 4각형 CDGF와 3개의 작은 3각형 ABE, BCE, DAE의 면적관계를 찾아야 합니다. CF=AE, DG==BE로부터 밑변이 같은 3각형을 생각할수 있습니다. 그러므로 CG와 AG를 맺으면 3각형 BCE와 CGD, 3각형 ABE와 ADG, 3각형 CFG와 AEG는 모두 밑변과 높이가 같은 3각형이 됩니다(그림 6－6).

그림 6 － 6

풀기 그림 6－6과 같이 보조선 CG와 AG를 맺습니다. 3각형 BCE와 CGD, 3각형 ABE와 ADG에서 BE=DG이고 공통점이 각각 C와 A이므로 그것들은 밑변과 높이가 같은 3각형이며 면적도 같습니다. 그러므로

3각형 BCE의 면적+3각형 CDE의 면적
=3각형 CGD의 면적+3각형 CDE의 면적
=3각형 CGE의 면적
=3각형 ABE의 면적+3각형 AED의 면적
=3각형 ADG의 면적+3각형 AED의 면적
=3각형 AEG의 면적

3각형 CFG와 AEG에서 CF=AE이고 공통점이 G이므로 그것들도 밑변이 같고 높이가 같은 3각형이며 면적도 같습니다. 그러므로

3각형 EFG의 면적
=3각형 CFG의 면적+3각형 CGE의 면적

=3각형 AEG의 면적+3각형 CGE의 면적
=(3각형 ABE의 면적+3각형 AED의 면적)+
(3각형 BCE의 면적+3각형 CDE의 면적)
=4각형 ABCD의 면적
=10(cm^2)

따라서 3각형 EFG의 면적은 10cm^2입니다.

실례 4. 그림 6－7에서 바른4각형 ABCD의 한변의 길이는 4cm이고 직4각형 DEFG의 길이 DG=5cm입니다. 직4각형의 너비 DE는 얼마입니까?

그림 6 － 7

따져보기 직4각형의 면적=길이×너비이고 직4각형 DEFG의 길이는 주어졌으며 너비를 구해야 하므로 먼저 직4각형 DEFG의 면적을 구합니다. 바른4각형 ABCD의 면적은 주어졌으므로 바른4각형 ABCD와 직4각형 EFGD의 면적들사이에 어떤 관계가 있는가를 알면 됩니다. 두 도형이 겹친 부분을 봅시다. AG를 맺으면(그림 6－8) 바른4각형 ABCD에서 3각형 AGD의 밑변과 높이는 각각 바른4각형의 한변의 길이 AD와 CD이므로 그것들의 면적은 바른4각형 ABCD의 면적의 절반입니다. 꼭같이 직4각형 EFGD에서 3각형 AGD의 밑변은 직4각형의 길이 DG이고 높이는 직4각형의 너비 DE이므로 그것의 면적도 직4각형 DEFG면적의 절반이 됩니다. 이렇게 하여 직4각형 DEFG와 바른4각형 ABCD의 면적사이의 관계가 밝혀졌습니다.

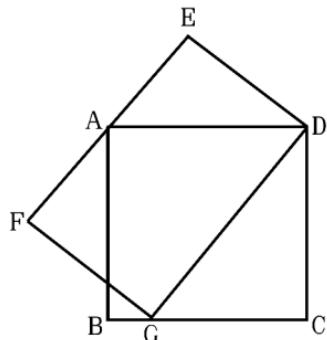
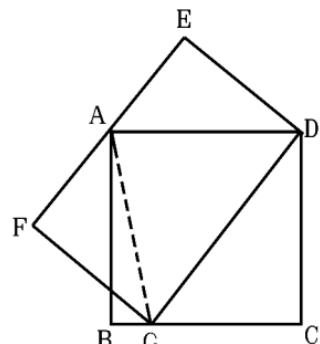



그림 6 － 8

풀기 그림 6－8과 같이 보조선 AG를 맺습니다.

3각형 AGD의 면적은 바른4각형 ABCD면적의 절반이고 또 직4각형 DEFG면적의 절반이므로

직4각형 DEFG의 면적=바른4각형 ABCD의 면적=4×4==16(cm^2)이고 직4각형 DEFG의 너비는 DE=16÷5=3.2(cm)입니다.

따라서 직4각형 DEFG의 너비는 3.2cm입니다.

실례 5. 그림 6－9에서 3각형 ABC의 면적은 5cm^2이고 AE=DE, BD=2DC입니다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하십시오.

그림 6 － 9

따져보기 빗선을 친 부분은 2개의 3각형입니다. 그런데 3각형 AEF의 면적을 직접 계산하기는 힘듭니다. AE=ED이므로 DF를 맺으면 3각형 AEF와 EDF의 면적이 같아집니다. 그러므로 빗선을 친 부분의 면적은 3각형 BDF의 면적구하는 문제로 넘어갑니다.

그림 6 － 10

풀기 DF를 맺습니다(그림 6－10).

AE=ED이므로

3각형 AEF의 면적=3각형 EDF의 면적이고

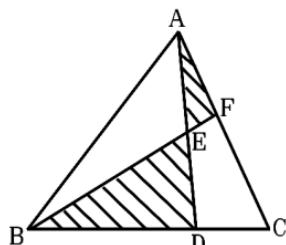
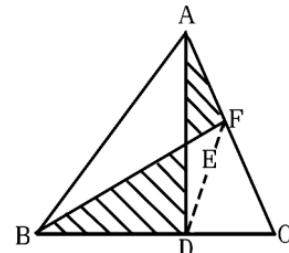
3각형 ABE의 면적=3각형 BDE의 면적이 됩니다.

BD=2DC이므로

3각형 BDF의 면적=2×3각형 DCF의 면적

입니다. 그러므로 3각형 ABF의 면적=3각형 BDF의 면적

=2×3각형 DCF의 면적

이 됩니다. 이로부터 3각형 ABC의 면적=5×3각형 DCF의

면적이 얻어집니다. 3각형 ABC의 면적이 $5cm^2$이므로

$$3각형\ DCF의\ 면적=5\div5=1(cm^2)$$

가 됩니다. 따라서

빗선을 친 부분의 면적=3각형 BDF의 면적=2×3각형 DCF의 면적=$2(cm^2)$입니다.

이상의 실례들을 통하여 알수 있는바와 같이 많은 기하문제들에서 보조선을 리용하면 도형과 도형사이의 관계를 찾아 문제를 쉽게 풀수 있습니다. 이것은 도형과 도형사이에 《다리》를 놓아주는것과 마찬가지입니다. 구체적인 문제에 따라 보조선을 그을수도 있고 긋지 않을수도 있으며 여러개 그을수도 있습니다.

련습 6

1. 그림 6－11에서 3각형 ABC의 면적은 $1cm^2$이고 AE=3AB, BD=2BC입니다. 3각형 BDE의 면적을 구하십시오.

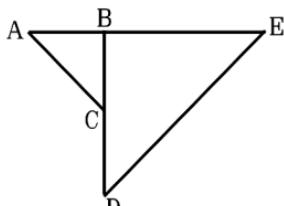



그림 6 － 11

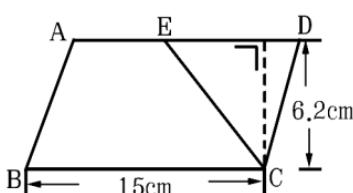



그림 6 － 12

2. 그림 6－12와 같이 평행4변형을 두 부분으로 갈랐습니다. 그것들의 면적차는 $18.6cm^2$입니다. AE는 얼마입니까?

3. 그림 6－13과 같이 바른4각형 ABCD의 대각선 BD가 DA와 BC를 지나는 2개의 평행선에 의하여 길이가 모두 1cm인 세 부분으로 나누어졌습

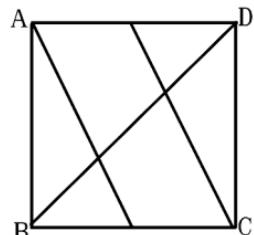



그림 6 － 13

니다. 바른4각형 ABCD의 면적을 구하십시오.

4. 그림 6-14에서 4각형 ABCD의 면적은 $1cm^2$이고 AB=AE, BC=BF, DC=CG, AD=DH입니다. 4각형 EFGH의 면적을 구하십시오.

5. 그림 6-15에서 직4각형 ABCD의 면적은 $36cm^2$이고 점 E, F, G는 변 AB, BC, DC의 가운데점이며 점 H는 변 AD우의 임의의 한 점입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 얼마입니까?

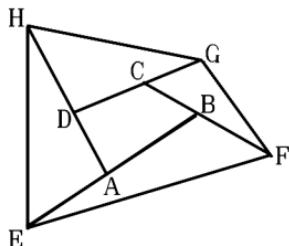



그림 6-14

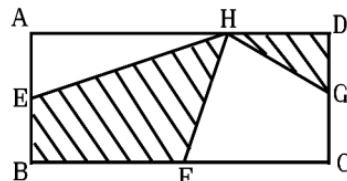



그림 6-15

답 및 풀기방향

1. $4cm^2$　　2. 3cm　　3. $4.5cm^2$　　4. $5cm^2$
5. $18cm^2$

제7절. 방정식을 세워 기하문제풀기

어느날 수업시간에 선생님은 다음과 같은 문제를 제시하였습니다.

그림 7-1에 준 평행4변형의 면적은 $48cm^2$입니다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하십시오.

그림 7-1

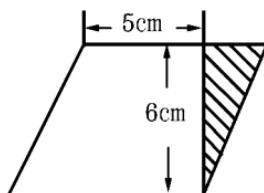
윤미가 한동안 생각하더니 다음

과 같이 말하였습니다. 이 3각형에서 높이만 주어졌으므로 그것의 면적을 직접 계산할수는 없습니다. 먼저 평행4변형을 세 부분으로 갈라놓으면 (그림 7—2) 량쪽에 있는 두 3각형의 면적은 같고 가운데 있는 직4각형의 면적도 구할수 있으므로 빗선을 친 3각형의 면적은

그림 7 – 2

$$(48-5\times6)\div2=9(\mathrm{cm}^2)$$

가 됩니다.

윤철이도 자기의 생각을 다음과 같이 말하였습니다.

이 3각형의 면적을 직접 구할수 있습니다. 그것의 높이는 6cm이므로 밑변을 $5+a$(a는 모르는 수)라고 하면 쉽게 구할수 있습니다. 평행4변형의 면적이 48cm^{2}이고 높이가 6cm이므로 방정식을 세우면 다음과 같이 됩니다.

$$(5+a)\times6=48$$

이것을 풀면 $a=3$이 얻어집니다. 그러므로 3각형의 면적은 $3\times6\div2=9(\mathrm{cm}^2)$입니다.

윤미가 푼것은 아주 묘하고 윤철이 푼것도 정확합니다. 윤철이는 모르는수를 넣어 방정식을 세워서 풀었습니다. 이 방법은 면적과 관계되는 계산문제에서 자주 쓰입니다. 몇개의 실례를 들어 자세히 살펴봅시다.

실례 1. 그림 7—3에서 3각형 ABE, AFD와 4각형 AECF의 면적은 같습니다. 3각형 AEF의 면적을 구하십시오.

따져보기 3각형 AEF의 밑변과 높이를 구하기는 힘듭니다. 그러므로 3각형의 면적구하는 공식을 직접 쓸수는 없습니다. 그림에서 보는바와 같이 3각형 AEF의 면적은 4각형 AECF의 면적에서 3각형 CEF의 면적을 던것과 같습니다. 4각형 AECF와 3각형 ABE, 3각형 AFD는 직4각형 ABCD의 면적을

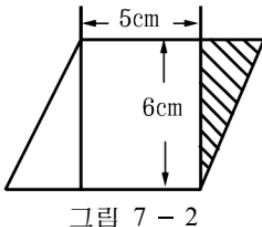
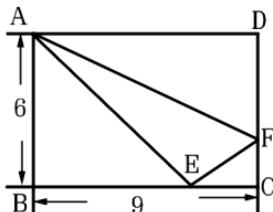



그림 7 – 3

3등분한것이므로 4각형 AECF의 면적을 구할수 있습니다. 여기서 기본은 3각형 ECF의 면적을 구하는것입니다. 3각형 ECF의 면적을 구하자면 CE, CF의 길이를 알아야 합니다. 이것은 또 BE, DF의 길이를 알아야 구할수 있습니다. 3각형의 면적구하는 공식을 써서 방정식을 세울수 있습니다.

풀기 직4각형 ABCD의 면적=$6\times9=54(cm^2)$이므로

3각형 ABE의 면적=3각형 AFD의 면적
=4각형 AECF의 면적
=$54\div3=18(cm^2)$

가 됩니다. 또 3각형 ABE의 면적=$6\times BE\div2$이므로

$$BE=18\times2\div6=6(cm)$$

입니다. 같은 방법으로 3각형 AFD의 면적=$9\times DF\div2$이므로

$$DF=18\times2\div9=4(cm)$$

입니다. 그러므로

$$CE=9-BE=3(cm)$$
$$CF=6-DF=2(cm)$$

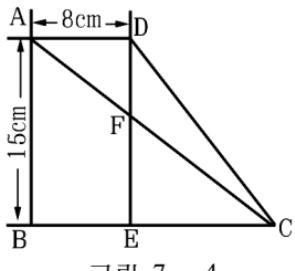
3각형 ECF의 면적=$3\times2\div2$
=$3(cm^2)$

3각형 AEF의 면적
=4각형 AECF의 면적－3각형 ECF의 면적
=$18-3=15(cm^2)$

입니다.

실례 2. 그림 7－4에서 변 AD는 8cm이고 변 AB는 15cm이며 4각형 ABED는 직4각형입니다. 3각형 CDF의 면적은 36cm^{2}입니다. 제형 ABCD의 면적을 구하십시오.

그림 7 － 4

따져보기 제형 ABCD의 면적을 구하자면 CE의 길이를 구해야 합니다. CE는 3각형 CDF의 높이입니다. 이 3각형의 밑변 DF의 길이는 모릅니다. 그런데 DF는 또 3각형 ADF의 높이입니다. 이 3각형의

면적을 알면 DF의 길이를 구할수 있습니다.

풀기 3각형 ACD의 면적$=8\times15\div2=60(cm^2)$이므로

3각형 ADF의 면적

=3각형 ACD의 면적−3각형 CDF의 면적

$=60-36=24(cm^2)$

가 됩니다. 그러므로 3각형 ADF의 면적은 $8\times DF\div2=$ $=24(cm^2)$이므로

$$DF=24\times2\div8=6(cm)$$

가 됩니다. 꼭같이 3각형 CDF에서 $DF\times CE\div2=36$이므로 $CE=36\times2\div6=12(cm)$가 됩니다. 그러므로

제형 ABCD의 면적$=(8+8+12)\times15\div2$

$=210(cm^2)$

입니다.

실례 3. 그림 7−5와 같은 직4각형모양의 철판이 있습니다. 긴 변에서 6cm를 자르고 짧은 변에서 3cm를 잘랐을 때 얻어지는 바른4각형의 면적은 본래의 직4각형의 면적보다 $54cm^2$ 작습니다. 본래의 직4각형모양의 철판의 면적을 구하십시오.

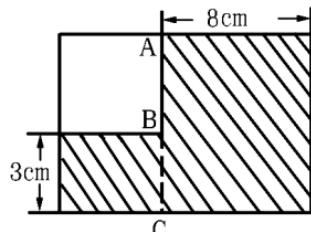



그림 7 − 5

따져보기 문제의 조건에 의하여

직4각형의 면적=바른4각형의 면적+54

가 됩니다.

이것은 빗선을 친 부분의 면적이 $54cm^2$라는것을 보여줍니다. 그러므로 바른4각형의 한변의 길이만 알면 됩니다.

풀기 바른4각형의 한변 AB를 연장하여 직4각형의 길이와 사귀는 점을 C라고 하고 바른4각형의 한변의 길이를 x(cm)라고 하면

빗선을 친 부분의 면적$=(3+x)\times6+3x$

가 됩니다. 그러므로

$$(3+x)\times 6+3x=54$$
$$18+6x+3x=54$$
$$9x=36$$
$$x=4$$

이 됩니다. 따라서

직4각형의 면적$=4\times 4+54=70(cm^2)$

또는 직4각형의 면적$=(4+6)\times(4+3)=70(cm^2)$입니다.

실례 4. 그림 7－6에서 제형 ABCD의 면적은 $45cm^2$이고 밑변 AB의 길이는 10cm이며 높이 EF의 길이는 6cm, 3각형 DOC의 면적은 $5cm^2$입니다. 3각형 ABO의 면적을 구하십시오.

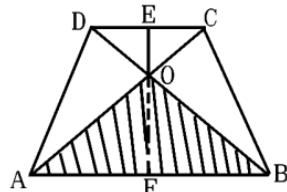



그림 7 － 6

따져보기 3각형 ABO의 면적을 구하기 위하여 3각형 ABO의 높이 OF를 구해야 합니다. 제형의 높이가 6cm라는것이 주어졌으므로 3각형 DOC의 높이 OE만 구하면 됩니다. 3각형 DOC의 면적은 이미 주어졌으므로 그것의 높이를 구하기 위해서는 먼저 변 DC의 길이를 구해야 하는데 변 DC의 길이는 제형의 면적구하는 공식으로부터 나옵니다.

풀기 제형의 면적구하는 공식에 의하여

$$(DC+10)\times 6\div 2=45$$

가 됩니다. 정돈하면

$$DC+10=45\times 2\div 6=15$$
$$DC=15-10=5(cm)$$

입니다.

3각형 DOC의 면적은 $5cm^2$이므로 3각형의 면적구하는 공식에 의하여

$$5\times OE\div 2=5$$
$$OE=5\times 2\div 5=2(cm)$$

입니다. 그러므로

$$OF=EF-OE=6-2=4(cm)$$

입니다.

$$3\text{각형 ABO의 면적}=10\times4\div2=20(\text{cm}^2)$$

따라서 3각형 ABO의 면적은 20cm^2입니다.

[설명]

이 문제를 다른 방법으로 풀수 있습니다. 3각형 ABC와 3각형 ABD는 높이가 같고 밑변이 같은 3각형이므로 그것들의 면적은 같아야 합니다. 이 두 3각형에서 3각형 ABO는 한번 겹칩니다. 주어진 3각형 DOC의 면적을 더하면 제형 ABCD의 면적은 3각형 AOB의 면적만큼 커집니다. 그러므로

3각형 ABO의 면적

=3각형 ABD의 면적+3각형 ABC의 면적+3각형 DOC의 면적−제형 ABCD의 면적

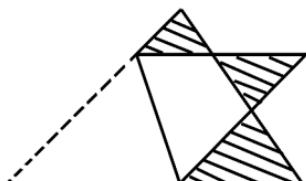
$=2\times10\times6\div2+5-45=60+5-45=20(\text{cm}^2)$

우의 실례들은 면적을 직접 계산하기 힘들 때 간단한 방정식을 세워 선분의 길이를 구한 다음 다시 면적구하는 공식을 리용하여 푸는 문제들입니다. 도형의 면적을 계산하는 문제를 푸는 방법에는 여러가지가 있으며 모르는 량을 설정하여 방정식을 세울 때도 이런 점에 주의를 돌려야 합니다.

실례 5. 그림 7−7에 있는 3각형모양의 종이쪼각을 점선을 따라 접어서 그림 7−8과 같이 만들었습니다. 본래의 3각형의 면적은 이 도형의 1.5배입니다. 그림 7−8에서 빗선을 친 3개의 3각형의 면적합은 1cm^2입니다. 겹친 부분의 면적을 구하십시오.

그림 7 − 7

그림 7 − 8

따져보기 겹친 부분의 4각형은 직4각형이나 바른4각형이 아니라 일반4각형이므로 면적구하는 공식을 쓸수 없습니다. 그러나 도형을 접기전과 접은 다음 관찰해

보면 1개의 겹친 부분이 더 크다는것을 알수 있습니다. 주어진 조건을 리용하여 방정식을 세워 풀수 있습니다.

풀기 겹친 부분의 면적을 x라고 하면 본래 3각형의 면적은 $1+2x$가 되고 그림 7－8에 있는 도형의 면적은 $1+x$가 됩니다. 문제의 조건에 의하여

$$1+2x=1.5\times(1+x)$$

정돈하면 $$1+2x=1.5+1.5x$$

$$0.5x=0.5$$

$$x=1$$

그러므로 겹친 부분의 면적은 $1cm^2$입니다.

[설명]

방정식을 세워 문제를 푸는 과정에 다음과 같은 점들에 주의하여야 합니다.

① 문제의 뜻을 정확히 리해하고 아는 량과 모르는 량을 잘 갈라야 합니다.

② 아는 량과 모르는 량사이의 같기관계를 찾아 방정식을 세워야 합니다.

③ 방정식을 풀어 모르는 량을 구합니다.

련습 7

1. 그림 7－9와 같이 모양이 같은 4개의 직4각형과 1개의 바른4각형을 붙여서 면적이 $49m^2$인 큰 바른4각형을 만들었습니다. 작은 바른4각형의 면적은 $4m^2$입니다. 직4각형의 너비는 얼마입니까?

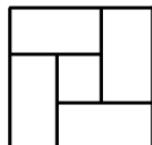



그림 7 － 9

2. 그림 7－10과 같이 꼭같은 9개의 직4각형을 붙여서 1개의 큰 직4각형을 만들었습니다. 매 작은 직4각형의 둘레길이는 18cm입니다. 짧은 변의 길이가 4cm라면 큰 직4

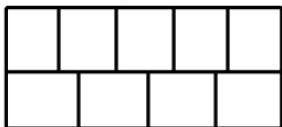
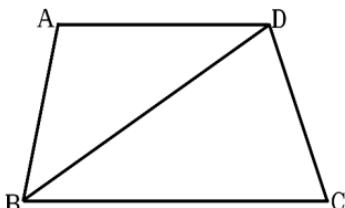



그림 7 － 10

각형의 면적은 얼마입니까?

그림 7 − 11

3. 그림 7－11에서 제형 ABCD의 면적은 $24cm^2$이고 AD=5cm, BC=7cm입니다. 3각형 ABD의 면적을 구하십시오.

4. 그림 7－12에서 4각형 ABCD는 직각제형이고 3각형 ABC, ACE, AED의 면적은 같고 BF와 AC는 수직이며 AC=10cm, AF=2cm, 제형의 면적은 $45cm^2$입니다. 3각형 BCF의 면적을 구하십시오.

5. 그림 7－13에서 4각형 ABCD는 직각제형이고 점 E는 변 AD의 가운데점이며 $FC=\frac{1}{4}BC$, AD=8cm, CD=7cm, BC=12cm입니다. 그리고 3각형 EPD와 3각형 PFC의 면적은 같습니다. 3각형 ABP의 면적을 구하십시오.

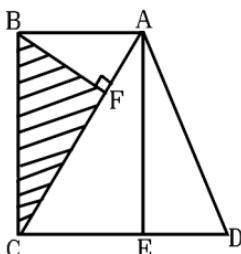



그림 7 − 12

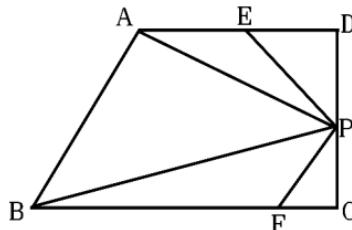



그림 7 − 13

답 및 풀기방향

1. 2.5m 2. $180cm^2$ 3. $10cm^2$ 4. $12cm^2$
5. $34cm^2$

제8절. 면적을 리용하여 응용문제풀기

선분을 그려 문제를 푸는것처럼 직4각형의 길이와 너비로 서로 다른 량을 표시하여 문제를 풀수 있습니다. 이때 직4각형의 면적을 리용하여 풀면 매우 편리해집니다.

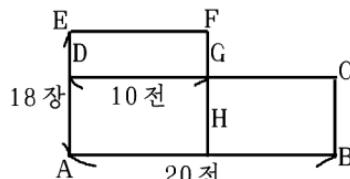
실례 1. 10전짜리우표와 20전짜리우표가 모두 18장 있는데 그 값은 2원 80전입니다. 10전짜리, 20전짜리 우표는 각각 몇장씩입니까?

따져보기 이 문제를 직4각형의 면적을 그려서 풀어봅시다.

그림 8－1

그림 8－1에서 AB, DG는 각각 20전, 10전짜리우표를 표시하고 AD, DE는 20전, 10전짜리우표의 매수를 표시합니다. 이때 직4각형 ABCD, DEFG의 면적은 각각 20전, 10전짜리우표의 총값을 표시합니다. 문제의 조건에 의하면 AE=18(장)이고 직4각형 ABCD와 DEFG의 면적합은 2원80전에 해당합니다. AD 또는 DE의 길이를 구하여 우표의 매수를 결정하면 됩니다.

이제 AD를 계산합시다.

AD는 직4각형 ABCD와 BCGH의 한변입니다. AB=20, HB=AB－DG=20－10=10입니다. 직4각형 ABCD와 BCGH의 면적만 안다면 직4각형의 면적구하는 공식을 리용하여 AD의 길이를 구할수 있습니다. 그런데 AE=18, AH=DG=10이므로 직4각형 AEFH의 면적은 18×10=180 즉 1원 80전입니다. 직4각형 ABCD와 DEFG의 면적의 합은 2원 80전이므로 직4각형 BCGH의 면적은 2.80－1.80=1.00(1원)입니다. 10전=0.1원이고 1÷0.1=10입니다.즉 AD=10입니다. 이렇게 하여 20전짜리우표의 매수가 결정되였습니다.

풀기 선분 AD, DE로 각각 20전, 10전짜리 우표의 매수를 표시하면 AB=20(전), AH=DG=10(전)이 됩니다. 직4각형 ABCD와 DEFG의 면적의 합은 2원 80전입니다.

직4각형 AEFH의 면적=0.10×18=1.80(1원 80전)

AD=(2.80−1.80)÷0.1=10(매)

DE=18−10=8(매)

따라서 20전짜리우표는 10매이고 10전짜리우표는 8매입니다.

실례 2. 한대의 뻐스가 도시에서 산간지대까지 갔다옵니다. 갔다오는데 모두 20시간 걸리며 갈 때 걸리는 시간은 올 때 걸리는 시간보다 1.5배 더 걸리고 갈 때는 올 때보다 1시간동안에 12km씩 적게 갑니다. 갔다오는데 몇 km를 달려야 합니까?

따져보기 문제의 조건에 의하면 갔다오는데 모두 20시간 걸리고 갈 때 걸린 시간은 올 때 걸리는 시간의 1.5배이므로 합과 배수에 관한 문제의 원리에 의하여 돌아오는데 걸리는 시간은 20÷(1+1.5)=8(시간)이고 갈 때 걸리는 시간은 20−8=12(시간)이라는것을 알수 있습니다.

거리=속도×시간이므로 직4각형의 길이와 너비로써 속도와 시간을 표시하면 직4각형의 면적은 전체 거리를 표시합니다(그림 8−2).

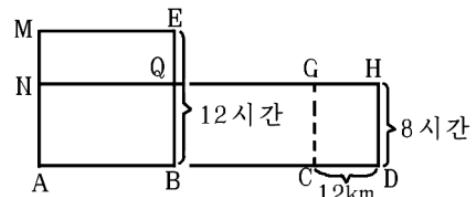



그림 8 − 2

갔다오는데 몇km 달렸는가를 구해야 하므로 직4각형 ABEM의 면적만 계산하면 됩니다. 직4각형 ABEM의 면적을 구하자면 AB를 알아야 합니다.

그림에서 AB, BD는 각각 갈 때와 올 때의 속도를 표시하고 BE, DH는 갈 때와 올 때 걸리는 시간을 표시합니다. 이때 BE=12, DH=8, BD=AB+12입니다.

보조선 CG와 QN을 그읍시다. 직4각형 ABEM과 직4각

형 BDHQ의 면적은 모두 도시와 산간지대사이의 거리를 표시하므로 같습니다. 또한 AB=BC이므로 직4각형 ABQN과 직4각형 BCGQ의 면적은 같습니다. 덜릴수와 더는수가 같으면 차도 같다는 결론에 의하여 직4각형 CDHG와 직4각형 EQNM의 면적이 같다는것을 알수 있습니다.

직4각형 CDHG의 면적$=12\times8=96$

이고 $QE=BE-BQ=12-8=4$, $96\div4=24$이므로 $AB=NQ=24$입니다. 즉 갈 때는 1시간동안에 24km씩 갔습니다. 이 속도에 의하여 돌아올 때의 거리를 계산할수 있습니다.

풀기 직4각형 CDHG의 면적$=12\times8=96$

$$EQ=BE-BQ=BE-DH=12-8=4$$

이고 직4각형 EQNM의 면적은 직4각형 CDHG의 면적과 같으며 AB의 값은 $96\div4=24$입니다.

직4각형 ABEM의 면적$=24\times12=288$

따라서 갔다오는데 달린 거리는

$$288\times2=576(\text{km})$$

입니다.

실례 3. 어떤 공장에서 혁신자들에게 주려고 값이 70원, 30원, 20원인 세 종류의 가방을 47개 사왔는데 모두 2,120원이 들었습니다. 그중에서 30원짜리 가방의 개수는 20원짜리 가방개수의 20배입니다. 세 종류의 가방을 각각 몇개씩 사왔습니까?

따져보기 먼저 주어진 조건에 맞게 그림 8−3을 그립니다. 그림에서 BE=47로서 세 종류의 가방의 총 개수를 표시합니다. BC, CD, DE는 각각 70원, 30원, 20원짜리 가방개수를 표시하고 CD=2DE입니다. 또한 AB=70(원), CJ=30(원), EF=20(원)입니다. 직4각형 ①, ②, ③의

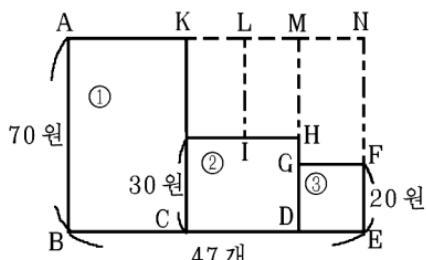



그림 8 − 3

면적은 세 종류의 가방을 다 사는데 든 돈 2,120원을 표시합니다.

DE의 값만 구하면 세 종류의 가방을 각각 몇개씩 사왔는가를 계산할수 있습니다. 보조선을 그으면 직4각형 ABEN이 얻어지는데 그것의 면적은 $70\times47=3,290$(원)입니다. 다각형 KJHGFN의 면적은 $3,290-2,120=1,170$(원)이 됩니다.

이제 다각형 KJHGFN과 DE사이의 관계를 밝히기 위하여 보조선 HM, IL을 그어 I가 JH의 가운데점이 되게 하면 JI=IH=DE가 됩니다. 다각형 KJHGFN을 결합시켜 직4각형을 만듭니다. 이 직4각형의 길이는 NF, MH, LI의 세 선분의 길이의 합과 같습니다. 너비는 DE이고 $NF=70-20=50$, $MH=LI=70-30=40$입니다. 그러므로 관계식 $(NF+MH+LI)\times DE=1,170$, $DE=1,170\div(50+40+40)=9$가 얻어집니다.

풀기 먼저 보조선을 그어 다각형 KJHGFN의 면적을 계산하면 다음과 같습니다.

$$70\times47-2,120=1,170\text{(원)}$$
$$NF=70-20=50$$
$$NH=LI=70-30=40$$
$$(NF+MH+LI)\times DE=1,170$$

이므로 $$DE=1,170\div(50+40+40)=9$$
$$CD=2DE=2\times9=18$$
$$BC=BE-CD-DE=47-18-9=20$$

입니다. 즉 세 종류의 가방은 각각 20개, 18개, 9개입니다.

실례 4. 어떤 유치원의 높은반에 3개의 반이 있습니다. 1반은 2반보다 4명 더 많고 2반은 3반보다 4명이 더 많습니다. 교양원이 어린이들에게 사과를 나누어주려고 합니다. 1반어린이들에게는 2반어린이들보다 3알씩 적게 나누어주고 2반어린이들에게는 3반어린이들보다 5알씩 적게 나누어주었습니다. 결과 1반은 2반보다 3알을 더 받게 되였고 2반은 3반보다 5알을 더 받게 되였습니다. 3개 반에 나누어준 사과는 모두 몇알입니까?

따져보기 그림 8−4에서 AB, BD, DG는 각각 3반, 2반, 1반 어린이들의 인원수를 표시하고 GH, DK, BN은 각각 1반, 2반, 3반의 매 어린이들에게 나누어준 사과알수를 표시합니다. 그러므로

$$BD=AB+4,\ DG=BD+4=AB+8$$

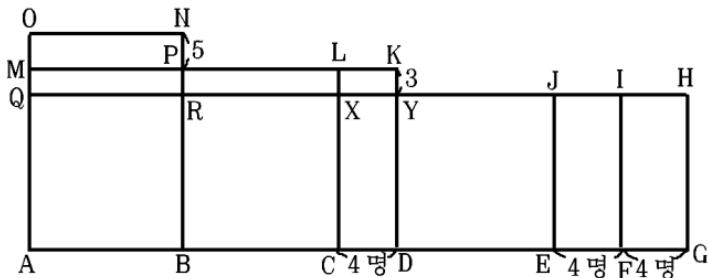



그림 8−4

입니다. 여기서 CD=EF=4이고 BN=DK+5, DK=HG+3입니다. 그리고 PN=5, KY=3입니다. 따라서 직4각형 DGHY, BDKP, ABNO의 면적은 각각 1반, 2반, 3반 어린이들에게 나누어준 사과의 총 알수입니다. 보조선을 그으면 그림 8−4로부터 직4각형 ABRQ, BCXR, DEJY의 면적은 같다는것을 알수 있습니다. 조건으로부터 직4각형 EGHJ의 면적은 직4각형 QRNO의 면적에 (3+5=)8을 더한것과 같습니다. 직4각형 EGHJ의 면적은 8HG와 같고 직4각형 QRNO의 면적은 ABXRN=8AB와 같습니다. 즉 8HG=8AB+8입니다. 그러므로 HG=QA=AB+1입니다. 그밖에 직4각형 BDYR와 직4각형 DFIY의 면적은 같습니다. 문제의 조건에 의하여 직4각형 FGHI의 면적은 직4각형 RYKP의 면적에 3을 더한것과 같고 직4각형 FGHI의 면적은 4GH이며 직4각형 RYKP의 면적은 3RY입니다. 그러므로 4GH=3RY+3=3(BC+4)+3=3BC+15 즉 4(AB+1)=3AB+15입니다. 마지막으로 AB=11, HG=12가 얻어집니다.

1반에 나누어준 사과알수=(11+4+4)×12=228(알)

2반에 나누어준 사과알수=(11+4)×(12+3)=225(알)

3반에 나누어준 사과알수=11×(12+3+5)=220(알)

3개 반에 나누어준 사과알수=228+225+220=673(알)

따라서 3개 반에 나누어준 총 사과알수는 673알입니다.

이상의 실례들을 통하여 그림을 리용하면 복잡한 수량관계가 명백히 밝혀지므로 문제풀이가 보다 쉽게 된다는것을 알수 있습니다.

련습 8

1. 어떤 도로를 매일 100m씩 닦으면 60일이면 끝낼수 있습니다. 본래의 계획보다 매일 25m씩 더 닦는다면 며칠동안에 끝낼수 있습니까?

2. 유치원에서 교양원이 어린이들에게 배를 나누어주는데 6알씩 주면 12알이 남고 7알씩 주면 11알이 모자랍니다. 어린이는 몇명이며 배는 몇알 있습니까?

3. 두 지점 ㄱ, ㄴ사이의 거리는 60km입니다. 두 사람 A, B가 오토바이와 자전거를 타고 동시에 같은 길을 따라 ㄱ에서 ㄴ까지 갑니다. 결과 A는 B보다 4시간 먼저 ㄴ에 도착하였습니다. 오토바이의 속도가 자전거속도의 3배라면 오토바이와 자전거의 속도는 얼마입니까?

4. 어떤 학생이 두 옹근수를 곱할 때 곱하는 수의 하나자리수 4를 1로 잘못보고 계산한 결과 곱한 적이 525로 되였습니다. 다른 한 학생은 이 하나자리수를 8로 잘못보고 계산한 결과 그 적이 700이 되였습니다. 정확히 계산한 결과는 얼마입니까?

5. 3개의 조가 꽃을 만드는데 1조는 2조보다 2명이 더 많고 2조도 3조보다 2명이 더 많으며 1조의 매 사람들이 만든 꽃은 2조의 매 사람들이 만든 꽃보다 1송이 적으며 2조의 매 사람들이 만든 꽃은 3조의 매 사람들이 만든 꽃보다 3송이 적습니다. 결과 1조에서 만든 총 꽃송이수는 2조가 만든 꽃송이보다 9송이 더 많았고 2조가 만든 꽃송

이수는 3조가 만든 꽃송이보다 3송이 더 많았습니다. 모두 몇송이 만들었습니까?

(※ 매 문제를 직4각형을 그려서 풀어야 합니다.)

답 및 풀기방향

1. 12일

그림을 그리면 그림 8-5와 같습니다.

그림에서 AB는 본래 하루에 계획한 작업량 100m를 표시하고 BH는 매일 넘쳐 일한 작업량 25m, AD는 본래 계획한 작업일수, DE는 계획보다 앞당긴 날자수를 표시합니다.

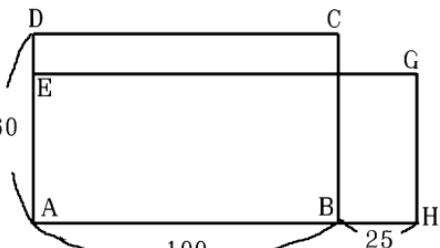



그림 8 - 5

직4각형의 한변은 매일 일한 작업량을 표시하고 다른 한변은 작업날자수를 표시하므로 직4각형의 면적은 총 작업량을 표시합니다. 총 작업량은 같으므로 직4각형 ABCD와 AHGE의 면적은 같습니다. 즉

$$100\times60=(100+25)\times HG$$

가 됩니다. AE=GH이므로 AE=6,000÷125=48(일)이 됩니다. 따라서 ED=AD-AE=60-48=12(일)이 됩니다. 즉 본래 계획보다 12일 앞당겨 끝냅니다.

2. 어린이는 23명이고 배는 150알입니다(그림 8-6).

그림에서 AB는 매 어린이에게 나누어준 배 6알을 표시하고

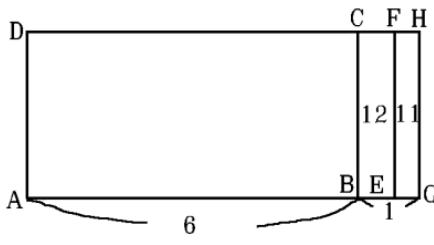



그림 8 - 6

AG는 매 어린이들에게 나누어준 배 7알을 표시하며 AD는 어린이인원수를 표시합니다. 직4각형 AEFD의 면적은 배의 총알수를 표시합니다. 직4각형 ABCD의 면적은 어린이들에게 배를 6알씩 주었을 때의 총알수를 표시합니다. 이때 배가 12알 남으므로 직4각형 BEFC의 면적은 12입니다. 또한 직4각형 AGHD의 면적은 어린이들에게 7알씩 나누어주었을 때의 배의 총알수를 표시합니다. 이때 11알이 모자라므로 직4각형 EGHF의 면적은 11입니다.

직4각형 BGHC의 면적은 12+11=23이고 AD×BG=23, BG=1이므로 AD=23÷1=23입니다.

직4각형 AEFD의 면적은 23×6+12=150 또는 23×(6+1)−11=150입니다. 즉 어린이는 23명이고 배는 150알입니다.

3. 오토바이는 1시간동안에 30km, 자전거는 1시간동안에 10km씩 달립니다.

그림을 그리면 그림 8−7과 같습니다.

그림에서 CD는 자전거의 속도, CE는 오토바이의 속도입니다. 이때 CE=3CD 즉 DE=2CD이고 CH는 오토바이가 ㄱ에서 ㄴ까지 가는데 걸리는 시간이며 HI=4(시간)입니다. 세로선분은 시간을 표시하고 가로선분은 속도를 표시하므로 직4각형의 면적은 거리를 표시합니다.

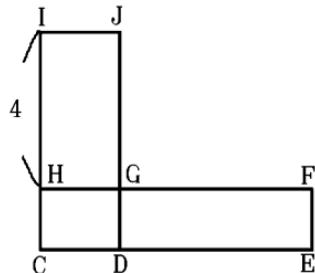



그림 8 − 7

직4각형 CEFH의 면적은 60이므로

$$CH=60\div 3CD=20\div CD$$

입니다. 직4각형 CDJI의 면적도 60이므로

$$CD\times(CH+4)=60$$

즉 $$CD\times\left(\frac{20}{CD}+4\right)=60$$

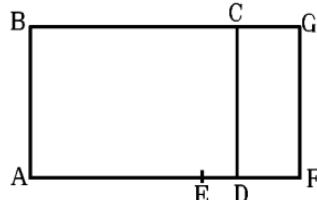
$$4CD=60-20=40$$

$$CD=10(km),\ CE=10\times3=30(km)$$

입니다. 따라서 오토바이는 1시간동안에 30km, 자전거는 1시간동안에 10km 달립니다.

4. 600

그림 8－8

그림 8－8에서 AB는 곱해지는 수를 표시하고 AE는 곱하는 수에서 하나자리수 4를 덜었을 때의 차를 표시하며 ED=1, EF=8이므로 직4각형 ABCD의 면적은 525입니다. 직4각형 ABGH의 면적은 700입니다. 그러므로 직4각형 CDFG의 면적값은 700과 525의 차입니다.

$$AB\times DF=700-525$$
$$7AB=175$$
$$AB=25$$
$$700\div25=28$$

즉 곱하는 수는 24이고 24×25=600입니다.

따라서 정확한 적은 600입니다.

5. 195송이(그림 8－9)

그림 8－9에서 AB, BD, DG는 각각 3조, 2조, 1조의 인원수를 표시하며 GH, DK, BN은 1조, 2조, 3조의 매 사람들이 만든 평균 꽃송이수입니다. 따라서 DB=AB+2, DG==BD+2=AB+4, CD=EF=FG=2, DK=GH+1, BN=DK+3=GH+4, KY=1, PN=3입니다. 여기서 기본은 AB, GH의 값을 구하는 것입니다.

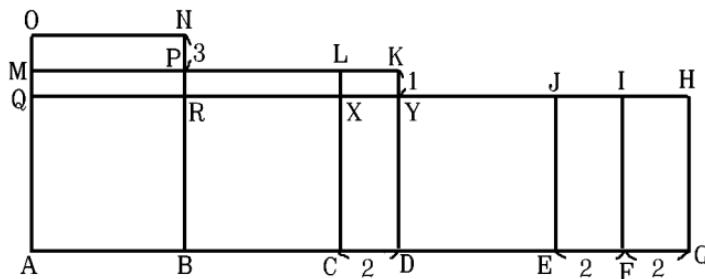



그림 8－9

직4각형 DGHY, DKPB, ABNO의 면적은 각각 3개 조가 만든 꽃송이수를 표시합니다. 그림에서 보는바와 같이 직4각형 ABRQ, BCXR, DEJY의 면적은 같습니다. 문제의 조건에 의하여 직4각형 EGHJ의 면적은 직4각형 QRNO의 면적에 (3+9=)12를 더한것과 같습니다. 직4각형 EGHJ의 면적은 4GH이며 직4각형 QRNO의 면적은 AB×RN, RN=3+1 즉 4AB+12=4GH이므로 GH=AB+3입니다.

이밖에 2개의 직4각형 BDYR와 DFIY의 면적은 같습니다. 문제의 조건에 의하여 직4각형 FGHI의 면적은 직4각형 RYKP의 면적에 9를 더한것과 같고 직4각형 FGHI의 면적은 2GH와 같으며 직4각형 RYKP의 면적은 1×(BC+2) 즉 2GH=AB+2+9=AB+11입니다.

그러므로 2(AB+3)=AB+11이고 이로부터 AB=5, GH=8이 언어집니다.

1조가 만든 꽃송이수: 8×(5+2+2)=72(송이)
2조가 만든 꽃송이수: (8+1)×(5+2)=63(송이)
3조가 만든 꽃송이수: (8+1+3)×5=60(송이)
3개 조가 만든 꽃송이수: 72+63+60=195(송이)

따라서 3개 조가 만든 꽃송이수는 모두 195송이입니다.

제9절. 《소 풀먹기》 문제

《소 풀먹기》문제를 처음 내놓은 사람은 유명한 과학자 뉴톤입니다. 그는 자기의 저서 《일반산수》에서 다음과 같은 문제를 제기하였습니다.

12마리의 소가 4주동안에 목장풀밭에 있는 풀을 $3\frac{1}{3}$ha(헥타르, 면적단위) 먹었고 꼭같은 풀을 21마리의 소가 9주동안에 10ha 먹었습니다. 24ha의 풀을 18주동안에 다 먹이려면 소가 몇마리 있어야 합니까?

후날 사람들은 이와 같은 문제를 뉴톤의 《소 풀먹기》문제 또는 간단히 《소 풀먹기》문제라고 부르게 되였습니다.

이 절에서는 이런 문제의 풀기방법을 학습합니다.

실례 1. 어떤 목장에 있는 풀밭의 풀이 자라는 속도는 일정합니다. 이 풀밭의 풀을 소 10마리가 20일간 먹을수 있고 15마리의 소가 먹는다면 10일간 먹을수 있습니다. 25마리의 소가 먹는다면 며칠간 먹을수 있습니까?(소가 매일 먹는 풀량은 같습니다.)

따져보기 이 문제를 푸는데서 어려운점은 목장에서의 풀의 총량이 일정하지 않고 시간이 지나감에 따라 커진다는데 있습니다. 그러나 그것이 얼마나 커지는가에 관계없이 총 풀량은 목장에 본래 있던 풀량과 매일 새로 자라는 풀량의 합입니다. 이제 선분으로 그것을 표시하여 이 두가지량과 소의 마리수사이의 관계를 찾은 다음 이 관계를 통하여 문제의 답을 찾읍시다.

그림 9−1에서 두 선분을 비교하면 다음과 같은 사실을 알수 있습니다.

10마리의 소가 20일동안에 먹는 풀의 총량은 15마리의 소가 10일동안에 먹는 총량보다 더 많으며 이 많은 부분은 10일동안에 새로 자란 풀량의 합에 해당됩니다. 하루사이에 새로 자란 풀량과 소 마리수사이의 관계를 구하기 위하여 다음과 같이 합니다.

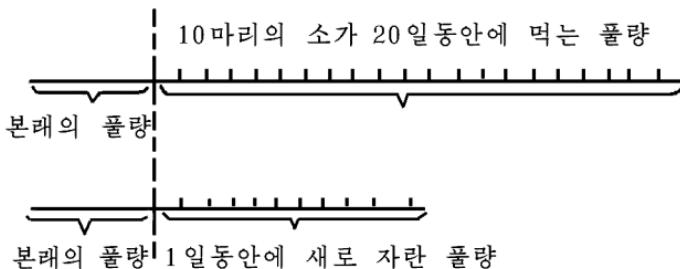



그림 9 − 1

10마리의 소가 20일동안에 먹은 풀량은 200마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량에 해당합니다. 다시말하여 1마리의 소가 200일동안에 먹는 풀량에 해당합니다. 15마리의 소가 10일간 먹는 풀량은 150마리의 소가 하루동안 먹는 풀량에 해당합니다. 즉 1마리의 소가 150일동안 먹는 풀량에 해당합니다. 이렇게 놓고보면 매일 새로 자라는 풀량은 5마리의 소가 하루동안 먹는 풀량에 해당합니다. 즉 1마리의 소가 5일간 먹는 풀량에 해당합니다. 여기서 $5=(10\times20-15\times10)\div(20-10)$입니다.

하루사이에 새로 자란 풀량이 5마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량과 같다는것을 구했으므로 20일동안에 새로 자란 풀량은 100마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량에 해당합니다. 따라서 본래부터 있은 풀량은 100마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량에 해당합니다. 본래의 풀량과 하루사이에 새로 자란 풀량 및 소 마리수사이의 관계가 밝혀졌으므로 문제가 쉽게 풀립니다.

풀기 10마리의 소가 20일동안에 먹는 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습니까?

$$10\times20=200(\text{마리})$$

15마리의 소가 10일동안에 먹을수 있는 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습니까?

$$15\times10=150(\text{마리})$$

(20－10)일사이에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습니까?

$$200-150=50(\text{마리})$$

매일 새로 자라는 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습니까?

$$50\div10=5(\text{마리})$$

20일(또는 10일)동안에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습니까?

$$5\times20=100(\text{마리})\quad(\text{또는 }5\times10=50(\text{마리}))$$

본래의 풀을 몇마리의 소가 하루동안에 먹을수 있습

니까?

$$200-100=100(\text{마리})\ \text{또는}\ 150-50=100(\text{마리})$$

25마리의 소가운데서 매일 5마리가 새로 자란 풀만 먹고 나머지 소들은 본래 있은 풀을 먹는다고 생각하면 목장의 풀을 며칠동안에 다 먹어버립니까?

$$100\div(25-5)=5(\text{일})$$

종합하면 다음과 같습니다.

$$[10\times20-(10\times20-15\times10)\div(20-10)\times20]\div(25-5)=5(\text{일})$$

답. 25마리의 소가 5일동안 먹을수 있습니다.

실례 2. 22마리의 소가 33ha의 풀을 54일동안에 다 먹어버립니다. 또한 17마리의 소는 28ha의 풀을 84일동안에 다 먹어버립니다. 40ha의 풀을 24일동안에 다 먹어버리게 하려면 몇마리의 소가 있어야 합니까? (풀이 자라는 속도는 같고 소가 하루에 먹는 풀량은 같습니다.)

따져보기 실례 1과 마찬가지로 이 문제를 푸는데서 기본은 1ha에서 하루에 자라는 풀량이 몇마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량에 해당하며 1ha의 풀밭에 본래 있은 풀량은 몇마리의 소가 하루에 먹는 풀량에 해당하겠는가를 계산하는것입니다. 이제 이 두 량을 구합시다.

22마리의 소가 54일동안에 33ha의 풀을 먹으므로 1ha에 본래 있은 풀량에 54일동안에 새로 자란 풀을 더하면 36마리의 소가 하루동안에 먹는 풀량이 됩니다. 즉 $22\times54\div33=36$(마리)입니다. 17마리의 소가 84일동안에 28ha의 풀을 먹으므로 본래 있은 풀량에 84일동안에 새로 자란 풀을 더하면 51마리의 소가 하루에 먹는 풀량이 됩니다. 즉 $17\times84\div28=51$(마리)입니다.

이렇게 하여 문제는 실례 1의 경우와 비슷하게 됩니다. 1ha의 풀밭에 있은 본래의 풀량에 54일동안에 새로 자란 풀량을 더하면 36마리가 하루에 먹을수 있는 풀량이 되고 1ha의 풀밭에 본래 있은 풀량에 84일동안에 새로 자란 풀량을 더하면 51마리의 소가 하루에 먹을수 있는 풀량이 되며 $51-36=15$(마리), $84-54=30$(일)이므로 1ha의 풀

밭에서 하루에 새로 자란 풀은 한마리의 소가 2일동안에 먹을수 있습니다. 즉 30÷15=2(일)입니다. 다시말하여 1ha의 풀밭에서 2일동안에 새로 자란 풀은 한마리의 소가 하루에 먹을수 있습니다.

1ha의 풀밭에서 2일동안에 새로 자란 풀은 한마리의 소가 하루에 먹을수 있으므로 54ha의 풀밭에서 새로 자란 풀은 (54÷2=)27마리의 소가 하루에 먹을수 있습니다. 따라서 33ha의 풀밭에서 54일동안에 새로 자란 풀은 (27×33=)891마리의 소가 하루에 먹을수 있습니다. 또 22마리의 소가 54일동안에 다 먹을수 있는 33ha의 본래의 풀량에 54일동안에 새로 자란 풀량을 더해야 하므로 (22×54=)1,188마리의 소가 하루에 다 먹을수 있습니다. 1,188－891=297이므로 33ha의 풀밭에 본래부터 있은 풀을 297마리의 소가 하루에 먹을수 있습니다. 따라서 1ha의 풀밭에 본래부터 있은 풀을 (297÷33=)9마리의 소가 하루에 먹을수 있습니다.

1ha의 풀밭에 본래부터 있은 풀량과 하루사이에 새로 자란 풀량 및 소마리수사이의 관계가 밝혀졌으므로 문제는 쉽게 풀립니다.

풀기 1ha의 풀밭에 본래 있은 풀량에 54일동안에 새로 자란 풀을 더한 풀량을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$22\times54\div33=36(\text{마리})$$

1ha의 풀밭에 본래 있은 풀량에 84일동안에 새로 자란 풀량을 더한 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$17\times84\div28=51(\text{마리})$$

1ha의 풀밭에서 하루에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$(51-36)\div(84-54)=0.5(\text{마리})$$

1ha의 풀밭에서 본래 있은 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$(54\times22-54\times0.5\times33)\div33=9(\text{마리})$$

또는 $$(84\times17-84\times0.5\times28)\div28=9(\text{마리})$$

40ha의 풀밭에 있는 본래의 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$9\times40=360(\text{마리})$$

1ha의 풀밭에서 24일동안에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루에 다 먹을수 있습니까?

$$0.5\times24=12(\text{마리})$$

40ha의 풀밭에서 24일사이에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루에 다 먹을수 있습니까?

$$12\times40=480(\text{마리})$$

40ha의 풀밭에서 본래 있은 풀에 24일사이에 새로 자란 풀을 더하면 몇마리의 소가 하루에 다 먹을수 있습니까?

$$(360+480)\div24=35(\text{마리})$$

답. 40ha의 풀을 35마리의 소가 24일동안 먹을수 있습니다.

실례 3. 어떤 목장에 17마리의 소가 먹는다면 30일동안 먹을수 있고 19마리의 소가 먹는다면 24일동안 먹을수 있는 풀밭이 있습니다. 지금 가지고있는 몇마리의 소를 6일동안 먹인 다음 4마리의 소를 팔았습니다. 나머지 소들을 2일동안 먹이면 풀이 없어집니다. 4마리의 소를 팔기전에 있은 소는 모두 몇마리입니까?(풀이 자라는 속도는 같고 소가 하루에 먹는 풀량도 같습니다.)

따져보기 뉴톤의 《소 풀먹기》 문제풀기방법에는 실례 1, 실례 2에서 쓴 방법외에 또 다른 방법이 있습니다. 이제 이 다른 풀기방법을 리용하여 이 문제를 풀어봅시다.

매일 소가 먹는 풀량을 1로 보면 《17마리의 소가 30일동안이면 풀을 다 먹어버립니다》라는 조건에 의하여 목장에 본래 있은 풀과 30일동안에 새로 자란 풀의 합은 $(1\times17\times30=)510$이 됩니다. 다시 조건 《19마리의 소가 24일동안에 풀을 다 먹어버립니다》로부터 목장에 본래 있은

풀과 24일동안에 새로 자란 풀의 합은 $(1\times19\times24=)456$이 된다는것을 알수 있습니다. 따라서 목장에서 하루에 새로 자란 풀은 $(510-456)\div(30-24)=9$라는것을 알수 있고 목장풀밭에 본래 있은 풀은 $510-9\times30=240$(또는 $456-9\times24=240$)이라는것을 알수 있습니다.

만일 도중에 4마리의 소를 팔지 않았다면 몇마리의 소가 8일동안에 먹은 풀은 목장에 본래 있은 풀과 8일동안에 새로 자란 풀의 합에 4마리의 소가 2일동안 먹은 풀을 더한것과 같습니다. 이 량은 $240+9\times8+1\times2\times4=320$이고 한마리의 소가 8일동안에 먹은 풀량은 $1\times8=8$입니다. 이렇게 하면 몇마리의 소가 있었는가를 알수 있습니다.

풀기 한마리의 소가 매일 먹는 풀량을 1이라고 합시다.

17마리의 소가 30일간 먹는 풀량은 얼마입니까?

$$1\times17\times30=510$$

19마리의 소가 24일간 먹는 풀량은 얼마입니까?

$$1\times19\times24=456$$

목장에서 하루에 새로 자라는 풀량은 얼마입니까?

$$(510-456)\div(30-24)=9$$

목장에 본래 있은 풀은 얼마입니까?

$$510-9\times30=240 \text{ 또는 } 456-9\times24=240$$

4마리의 소가 2일동안에 먹는 풀량은 얼마입니까?

$$1\times4\times2=8$$

몇마리의 소가 8일동안 먹는 풀량은 얼마입니까?

$$240+9\times8+8=320$$

목장에 몇마리의 소가 있었습니까?

$$320\div8=40\text{(마리)}$$

답. 40마리의 소가 있었습니다.

[설명]

3개의 실례를 푸는 과정을 통하여 알수 있는바와 같이 어느 방법을 써서 이 문제를 푸는가에 관계없이 문제풀이에서 기본은 본래 있은 풀량과 매일 새로 자라는 풀량을 알아내는데 있습니다.

련습 9

1. 목장풀밭의 풀을 27마리의 소에게 6주동안 먹일수 있고 또는 23마리의 소에게 9주동안 먹일수 있습니다. 만일 풀이 자라는 속도가 일정하다면 21마리의 소에게 몇주동안 먹일수 있습니까?

2. 목장풀밭의 풀이 자라는 속도는 일정합니다. 이 풀을 16마리의 소는 20일동안 먹을수 있고 양이 먹는다면 80마리의 양이 12일동안 먹을수 있습니다. 만일 한마리의 소가 먹는 풀량이 4마리의 양이 먹는 풀량과 같다면 10마리의 소와 60마리의 양이 함께 먹는다면 며칠동안 먹을수 있습니까?

3. 배에 얼마간의 물이 차있습니다. 배에 물이 일정한 속도로 들어오고있습니다. 10명이 퍼낸다면 3시간이면 다 퍼낼수 있고 5명이 퍼낸다면 8시간동안 퍼낼수 있습니다. 2시간동안에 물을 다 퍼내려고 한다면 몇명이 있어야 합니까?

4. 저수지에 일정한 량의 물이 들어있습니다. 강물이 같은 속도로 흘러들어옵니다. 5대의 양수기로 물을 푼다면 20일동안에 다 풀수 있고 꼭 같은 6대의 양수기로 푼다면 15일 걸립니다. 6일동안에 다 푸려고 한다면 꼭같은 양수기가 몇대 있어야 합니까?

5. 12마리의 소가 28일동안에 10ha의 풀을 다 먹을수 있고 21마리의 소가 63일동안에 30ha의 풀을 다 먹을수 있습니다. 126일동안에 72ha의 풀밭의 풀을 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

답 및 풀기방향

1. 21마리의 소가 12주동안에 다 먹을수 있습니다.

27마리의 소가 6주동안 먹을수 있는 풀을 몇마리의 소가 1주동안에 먹을수 있습니까?

$$27\times6=162$$

23마리의 소가 9주동안 먹을수 있는 풀을 몇마리의 소가 1주동안에 먹을수 있습니까?

$$23\times9=207$$

(9－6)주동안에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 1주동안 먹을수 있습니까?

$$207-162=45$$

1주동안에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 1주동안 먹을수 있습니까?

$$45\div3=15$$

본래 있은 풀을 몇마리의 소가 1주동안 먹을수 있습니까?

$162-15\times6=72$ 또는 $207-15\times9=72$

21마리의 소중에서 15마리의 소는 새로 자란 풀을 먹고 나머지 21－15=6마리의 소가 본래 있은 풀을 먹는다면 몇주동안 먹을수 있습니까?

$$72\div(21-15)=12$$

2. 10마리의 소와 60마리의 양이 함께 먹으면 8일 먹을수 있습니다.

16마리의 소가 20일동안 먹을수 있는 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$20\times16=320$$

80마리의 양(즉 20마리의 소)이 12일동안 먹을수 있는 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$20\times12=240$$

(20－12)일동안에 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$320-240=80$$

매일 새로 자란 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습니까?

$$80\div8=10$$

본래 있은 풀을 몇마리의 소가 하루에 먹을수 있습

니까?

$$320-10\times20=120 \text{ 또는 } 240-10\times12=120$$

10마리의 소와 60마리의 양(즉 25마리의 소)중에서 10마리의 소가 매일 새로 자란 풀을 먹고 나머지 (25−10=)15마리의 소가 본래 있은 풀을 먹는다면 본래 있은 풀을 15마리의 소가 며칠동안 먹을수 있습니까?

$$120\div15=8$$

(양을 기준으로 하여 계산할수도 있습니다.)

3. 2시간동안에 물을 다 푸려면 14명이 있어야 합니다.

10명이 3시간동안에 푸는 물량은 한시간동안에 몇명이 푸는데 해당합니까?

$$10\times3=30$$

5명이 8시간동안에 푸는 물량은 한시간동안에 몇명이 푸는데 해당합니까?

$$5\times8=40$$

(8−3)시간동안에 배에 들어오는 물은 한시간동안에 몇명이 푸는데 해당합니까?

$$40-30=10$$

한시간동안에 배에 들어오는 물은 한시간동안에 몇명이 푸는데 해당합니까?

$$10\div5=2$$

본래 배에 있은 물은 한시간동안에 몇명이 푸는데 해당합니까?

$$30-2\times3=24 \text{ 또는 } 40-2\times8=24$$

2시간동안에 배에 들어오는 물은 몇명이 한시간동안에 푸는데 해당합니까?

$$2\times2=4$$

2시간동안에 다 푸려면 몇명 있어야 합니까?

$$(24+4)\div2=14$$

4. 6일동안에 다 푸려면 꼭같은 양수기가 12대 있어야 합니다.

5대의 양수기로 20일동안에 푸는것을 한대의 양수기

로 푸려면 며칠이 걸립니까?

$$5\times20=100$$

6대의 양수기로 15일동안에 푸는것을 한대의 양수기로 푼다면 며칠이 걸립니까?

$$15\times6=90$$

(20－15)일동안에 저수지에 들어오는 물을 한대의 양수기로 푼다면 며칠이 걸립니까?

$$100-90=10$$

하루동안에 저수지에 들어오는 물을 한대의 양수기로 푼다면 며칠 걸립니까?

$$10\div5=2$$

저수지에 본래 있은 물을 한대의 양수기로 푼다면 며칠 걸립니까?

$100-2\times20=60$ 또는 $90-2\times15=60$

6일동안에 저수지에 들어오는 물을 한대의 양수기로 푼다면 며칠이 걸립니까?

$$2\times6=12$$

6일동안에 다 푸려면 몇대의 양수기가 있어야 합니까?

$$(60+12)\div6=12$$

5. 36마리의 소가 126일동안에 72ha의 풀밭의 풀을 다 먹을수 있습니다.

12마리의 소가 28일동안 먹을수 있는 10ha의 풀밭의 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$12\times28=336$$

21마리의 소가 63일동안 먹을수 있는 30ha의 풀밭의 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$21\times63=1,323$$

12마리의 소가 28일동안 먹을수 있는 10ha가운데서 1ha의 풀밭의 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$336\div10=33.6$$

21마리의 소가 63일동안 먹을수 있는 30ha가운데서

1ha의 풀밭의 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$1,323 \div 30 = 44.1$$

(63－28)일동안에 1ha의 풀밭에서 새로 자란 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$44.1 - 33.6 = 10.5$$

1ha의 풀밭에서 하루동안에 새로 자란 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$33.6 - 0.3 \times 28 = 25.2 \text{ 또는 } 44.1 - 0.3 \times 63 = 25.2$$

본래 있은 72ha의 풀밭의 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$25.2 \times 72 = 1,814.4$$

72ha의 풀밭에서 하루동안에 새로 자란 풀을 하루동안에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$0.3 \times 72 = 21.6$$

72ha의 풀밭에서 126일동안에 새로 자란 풀을 하루에 다 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$21.6 \times 126 = 2,721.6$$

72ha의 풀밭의 풀을 126일동안에 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

$$(2,721.6 + 1,814.6) \div 126 = 36$$

제10절. 《소 풀먹기》 문제의 응용

《소 풀먹기》 문제를 리용하여 여러가지 응용문제를 풀수 있습니다. 이제 몇개의 실례를 들어봅시다.

실례 1. 목장에 있는 풀밭의 풀을 말과 소가 함께 먹는다면 45일간 먹을수 있고 양과 말이 함께 먹는다면 60일간 먹을수 있으며 소와 양이 함께 먹는다면 90일간 먹을수 있습니다. 소와 양이 하루에 먹는 풀량은 말이 하루

에 먹는 풀량과 같습니다. 말, 소, 양을 동시에 함께 먹인다면 며칠동안 먹을수 있습니까?

따져보기 조건 《말과 소가 함께 먹는다면 45일간 먹을수 있습니다.》와 《소와 양이 하루에 먹는 풀량은 말이 하루에 먹는 풀량과 같습니다.》에 의하여 말과 소가 45일간 먹는 풀량은 양과 2배의 소가 45일간 먹는 풀량과 같다는것을 알수 있습니다.

조건 《소와 양이 먹는다면 90일동안에 다 먹습니다.》와 90÷2=45라는데 의하여 양과 소가 45일동안에 본래 있은 풀의 절반과 45일동안에 새로 자란 풀을 다 먹을수 있다는것을 알수 있습니다.

《양과 2배의 소가 45일동안에 본래의 풀과 새로 자란 풀을 다 먹을수 있습니다.》와 《양과 소가 45일동안에 본래 풀의 절반과 새로 자란 풀을 다 먹을수 있습니다.》를 비교하면 본래 있은 풀의 절반을 소가 45일간 먹을수 있다는것을 알수 있습니다. 즉 본래의 풀을 소가 먹는다면 90일간 먹을수 있습니다.

조건 《양과 소가 함께 먹는다면 90일간이면 다 먹을수 있습니다.》와 《본래 있은 풀을 소가 먹는다면 90일간 먹을수 있습니다.》를 비교하여 매일 새로 자라는 풀은 매일 양이 먹는 풀량과 같다는것을 알수 있습니다.

다시 조건 《말과 양이 함께 먹으면 60일동안에 다 먹을수 있습니다.》와 《양은 매일 새로 자라는 풀을 다 먹어버립니다.》라는 조건으로부터 본래의 풀을 말이 먹는다면 60일간 먹을수 있다는것을 알수 있습니다. 이러한 사실을 리용하면 문제는 쉽게 풀립니다.

풀기 말, 소, 양이 다 같이 함께 먹을 때 양은 매일 새로 자라는 풀을 먹고 말과 소는 본래 있은 풀만 먹는다고 생각합시다.

소는 하루동안에 본래 있는 풀의 $\frac{1}{90}$을 먹고 말은 하루동안에 본래 있는 풀의 $\frac{1}{60}$을 먹으므로 말과 소는 하루

동안에 본래 있은 풀의 $\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{90}=\right)\frac{1}{36}$을 먹습니다.

말, 소, 양이 동시에 먹는다면 며칠동안 먹을수 있습니까?

$$1\div\frac{1}{36}=36\,(\text{일})$$

답. 말, 소, 양이 동시에 먹는다면 36일 먹을수 있습니다.

실례 2. 어떤 저수지에 1분동안에 $4m^3$의 물이 흘러들어갑니다. 5개의 수문을 열어놓으면 2시간 30분사이에 저수지의 물이 다 빠져나갑니다. 8개의 수문을 열어놓으면 1시간 30분사이에 저수지의 물이 다 빠져나갑니다. 13개의 수문을 열어놓는다면 몇시간이면 물이 다 빠져나갈수 있습니까? (수문으로부터 한시간동안에 빠져나가는 물량은 같습니다.)

따져보기 《소 풀먹기》문제에서 기본은 2개의 량을 구하는것이라는것을 알고있습니다. 그 하나는 매일 새로 자라는 풀량이며 다른 하나는 본래 있던 풀량입니다. 이에 대응하는 2개량은 다음과 같습니다. 하나는 1개의 수문으로부터 1분동안에 나가는 물량이 얼마인가 하는것이고 다른 하나는 물을 뽑기전에 저수지에 있은 본래의 물량이 얼마인가 하는것입니다.

매 수문에서 1분동안에 나가는 물량을 1로 봅시다. 2시간 30분=150분이고 1시간 30분=90분이므로 5개의 수문을 2시간 30분 열어놓았을 때 나가는 물량은 $1\times5\times150=$ $=750$이며 8개의 수문을 1시간 30분동안 열어놓았을 때 나가는 물량은 $1\times8\times90=720$입니다. 2시간 30분은 1시간 30분보다 60분이 더 많으며 이 60분동안에 저수지에 들어오는 물량은 $4\times60=240(m^3)$입니다. 그러므로 1개의 수문을 통하여 1분동안에 나가는 물량은 $240\div(750-720)=8(m^3)$입니다.

1개의 수문으로부터 1분동안에 $8m^3$의 물이 나가므로

8개의 수문을 통하여 1시간 30분사이에 나가는 물량은 $8 \times 8 \times 90 = 5,760(m^3)$입니다. 90분동안에 흘러들어오는 물량은 $4 \times 90 = 360(m^3)$입니다. 그러므로 본래 저수지에 있는 물량은 $5,760 - 360 = 5,400(m^3)$입니다. 이 2개 량에 의거하면 풀이가 쉽게 얻어집니다.

풀기 1개의 수문에서 1분동안에 나가는 물량을 1이라고 합시다.

5개의 수문을 2시간 30분동안 열었을 때 나가는 물량은 얼마입니까?

$$1 \times 5 \times 150 = 750$$

8개의 수문을 1시간 30분동안 열었을 때 나가는 물량은 얼마입니까?

$$1 \times 8 \times 90 = 720$$

2시간 30분은 1시간 30분보다 몇분이 더 많습니까?

$$150 - 90 = 60(\text{분})$$

60분동안에 저수지에 들어오는 물량은 얼마입니까?

$$4 \times 60 = 240(m^3)$$

1개의 수문에서 1분동안에 나가는 물량은 얼마입니까?

$$240 \div (750 - 720) = 8(m^3)$$

저수지에 본래 있은 물량은 얼마입니까?

$$8 \times 8 \times 90 - 4 \times 90 = 5,400(m^3)$$

또는 $$8 \times 5 \times 150 - 4 \times 150 = 5,400(m^3)$$

13개의 수문에서 1분동안에 나가는 물량은 얼마입니까?

$$8 \times 13 = 104(m^3)$$

13개의 수문을 1분동안 열었을 때 저수지에 본래 있은 물이 얼마나 나갑니까?

$$104 - 4 \times 1 = 100(m^3)$$

13개의 수문을 열었을 때 저수지에 본래 있던 $5,400m^3$의 물을 뽑으려면 몇시간이 걸립니까?

$$5,400 \div 100 = 54(\text{분})$$

답. 13개의 수문을 다 열었을 때 54분이면 물을 다 뽑을수 있습니다.

실례 3. 창고 A, B, C가 있는데 매 창고에는 같은 량의 화학비료가 있습니다. A의것을 다 운반하자면 1대의 콘베아와 12명의 로동자가 5시간동안 일해야 하며 B의것을 다 운반하자면 1대의 콘베아와 28명의 로동자가 3시간동안 일해야 합니다. C의것을 운반하자면 2대의 콘베아가 있어야 합니다. 만일 2시간동안에 C의것을 다 운반하자면 몇명의 로동자가 있어야 합니까?(콘베아의 수송능력은 같고 로동자들이 1시간동안에 운반하는 량도 같습니다.)

따져보기 《소 풀먹기》문제에서 새로 자라는 풀과 소가 먹는 량사이에는 서로 덜어지는 관계에 있습니다. 이 문제에서는 콘베아의 운반량과 로동자들이 운반하는 량은 서로 더해지는 관계에 있습니다. 비록 차이는 있지만 《소 풀먹기》 문제에서 쓴 방법을 쓸수 있습니다.

한명의 로동자가 1시간동안 운반하는 화학비료량을 1이라고 하면 12명의 로동자가 5시간동안에 운반할수 있는 량은 $(1\times12\times5=)60$이며 28명의 로동자가 3시간동안에 운반할수 있는 량은 $(1\times28\times3=)84$입니다. 이때 다음과 같은 관계가 성립합니다.

A에 있는 화학비료의 량=1대의 콘베아가 5시간동안에 운반하는 량+60

B에 있는 화학비료의 량=1대의 콘베아가 3시간동안에 운반하는 량+84

두 창고 A, B에 보관되여있는 화학비료의 량이 같으므로 우의 두 식을 대비하여 1대의 콘베아가 1시간동안에 운반하는 량은 $(84-60)\div(5-3)=12$이라는것을 알수 있습니다. 이로부터 매 창고에 보관되여있는 화학비료가 얼마나 되는가를 계산할수 있습니다.

풀기 한명의 로동자가 1시간동안에 운반하는 화학비료의 량을 1이라고 하면 A에는 화학비료가 얼마나 있습니까?

60+1대의 콘베아가 5시간동안 운반하는 량

B에는 화학비료가 얼마나 있습니까?

84+1대의 콘베아가 3시간동안에 운반하는 량

1대의 콘베아가 1시간동안에 운반하는 량은 얼마나 됩니까?

$$(84-60)\div(5-3)=12$$

매 창고에 있는 화학비료의 량은 얼마입니까?

$$28\times3+12\times3=120 \text{ 또는 } 12\times5+12\times5=120$$

2대의 콘베아가 2시간동안에 운반할수 있는 량은 얼마입니까?

$$12\times2\times2=48$$

C에서 2대의 콘베아가 2시간동안 운반하였을 때 창고에 남아있는 화학비료는 얼마입니까?

$$120-48=72$$

2시간동안에 C의것을 다 운반하자면 몇명의 로동자가 더 있어야 합니까?

$$72\div2=36(\text{명})$$

답. 2시간동안에 C의 화학비료를 다 운반하려면 36명의 로동자가 더 있어야 합니다.

실례 4. 속도가 서로 다른 3대의 승용차가 같은 지점에서 동시에 출발하여 같은 길을 따라 앞에 가는 뻐스를 따라 잡으려고 합니다. 3대의 승용차는 각각 6분, 10분, 12분 지나서 뻐스를 따라 잡았습니다. 제일 빠른 승용차는 1시간동안에 24km 가고 그다음 빠른 승용차는 1시간동안에 20km씩 갑니다. 속도가 제일 늦은 승용차의 속도는 얼마입니까?

따져보기 이 문제는 거리문제이므로 거리=속도×시간 공식을 써야 합니다. 이제 《소 풀먹기》문제와 대비하여 문제를 풀어봅시다. 3대의 승용차가 출발할 때 뻐스와 출발지점사이의 거리는 《본래 있은 풀》에 해당하며 3대의 승용차가 출발한 때로부터 뻐스와의 거리는 《새로 자란 풀》에 해당합니다. 이 두 량을 결정하면 됩니다.

속도가 제일 빠른 승용차가 6분동안 간 거리는 3대의 승용차의 출발지점으로부터 뻐스까지의 거리와 뻐스가 6분동안에 간 거리의 합과 같습니다. 즉

3대의 승용차의 출발지점으로부터 뻐스까지의 거리+뻐스가 1분동안에 간 거리×6= $\frac{24}{60}\times 6=2\frac{2}{5}$ (km)입니다.

꼭같이 두번째로 빠른 승용차가 10분동안에 간 거리는 3대의 승용차의 출발지점으로부터 뻐스까지의 거리와 뻐스가 10분동안에 간 거리의 합과 같습니다. 즉

3대의 승용차의 출발지점으로부터 뻐스까지의 거리+뻐스가 1분동안에 간 거리×10= $\frac{20}{60}\times 10=3\frac{1}{3}$ (km)입니다.

이 두 식을 대비하여 뻐스의 속도를 구하면

$$\left(3\frac{1}{3}-2\frac{2}{5}\right)\div(10-6)=\frac{7}{30}\ \text{(km/min)}$$

뻐스의 속도만 알면 뻐스와 3대의 승용차의 출발지점사이의 거리를 구할수 있고 따라서 문제는 쉽게 풀립니다.

풀기 뻐스의 속도는 얼마입니까?

$$\left(\frac{20}{60}\times 10-\frac{24}{60}\times 6\right)\div(10-6)=\frac{7}{30}\ \text{(km/min)}$$

3대의 승용차가 출발할 때 뻐스와 3대의 승용차의 출발지점사이의 거리는 얼마입니까?

$$\frac{24}{60}\times 6-\frac{14}{60}\times 6=1\text{(km)}\ \text{또는}\ \frac{20}{60}\times 10-\frac{14}{60}\times 10=1\text{(km)}$$

3대의 승용차가 출발하여 12분이 지난후 뻐스와 속도가 제일 늦은 승용차 그리고 출발지점사이의 거리는 얼마입니까?

$$1+\frac{14}{60}\times 12=\frac{228}{60}\ \text{(km)}$$

속도가 제일 늦은 승용차는 1분동안에 얼마를 갑니까?

$$\frac{228}{60}\div 12=\frac{19}{60}\ \text{(km)}$$

속도가 제일 늦은 승용차는 1시간동안에 얼마를 갑니까?

$$\frac{19}{60} \times 60 = 19(\text{km})$$

답 속도가 제일 늦은 승용차는 1시간에 19km 갑니다.

련습 10

1. 어떤 역의 차표파는곳에 차표를 팔기전부터 사람들이 한줄로 서있습니다. 차표를 팔기 시작하여 1분동안에 10명씩 차표를 삽니다. 1개의 차표파는곳에서 1분동안에 25명씩 차표를 삽니다. 만일 차표파는곳이 하나뿐이면 차표를 팔기 시작하여 8분이 지나면 줄에 서있는 손님이 없어집니다. 차표파는곳이 두곳이라면 차표를 팔기 시작하여 몇분이 지나면 줄에 서있는 손님이 없어집니까?

2. 어떤 극장에 문을 열기전부터 400명의 손님들이 줄을 지어 기다리고있습니다. 문을 열었을 때 1분동안에 극장에 들어오는 손님수는 같습니다. 1개의 출입문에서 1분동안에 10명을 들여놓을수 있습니다. 4개의 출입문을 연다면 20분후에는 줄을 지어 서있는 손님들이 없습니다. 6개의 출입문을 연다면 문을 연 때로부터 몇분이 지나면 손님이 없어집니까?

3. 배에 물이 흘러들어오는것을 알았을 때에는 이미 얼마간의 물이 차있었습니다. 지금 같은 속도로 배에 물이 들어오고있습니다. 10명이 물을 푼다면 3시간이면 다 풀수 있고 5명이 물을 푼다면 8시간이면 다 풀수 있습니다. 2시간동안에 물을 다 푸려고 한다면 몇명이 있어야 합니까?(한 사람이 1시간동안에 푸는 물량은 같습니다.)

4. 저수지에 일정한 량의 물이 있습니다. 물이 저수지에 흘러들어오는 속도는 같습니다. 5대의 양수기로 20일동안 물을 푸면 저수지의 물을 다 풀수 있습니다. 6대의 양수기로 15일동안 물을 푸면 다 풀수 있습니다. 6일동안에 물을 다 푸려면 몇대의 양수기가 있어야 합니까? (양수기가 매일 푸는 물량은 같습니다.)

5. 어떤 목장에 세 뙈기의 풀밭이 있는데 풀이 자라는 속도는 같습니다. 매 뙈기의 면적은 각각 $3\frac{1}{3}$ha, 10ha, 24ha입니다. 12마리의 소가 4주간이면 첫 뙈기의 풀을 다 먹어버리며 21마리의 소가 9주간이면 두번째 뙈기의 풀을 다 먹어버립니다. 세번째 뙈기에 있는 풀을 18주간 소에게 먹이려면 몇마리의 소가 있어야 합니까?

답 및 풀기방향

1. 3분 2. 10분 3. 14명 4. 12대 5. 36마리

제11절. 순환

우리는 한주일은 7일이며 1년은 12달이라는것을 알고 있습니다. 자연에는 이와 비슷한 반복현상들이 많습니다. 이런 현상을 주기현상이라고 부릅니다. 7개의 수가 한번 순환하면 주기가 7이라고 부르고 12개의 수가 한번 순환하면 주기가 12라고 부릅니다.

수의 순환을 학습하는것은 그 주기성을 찾고 주기를 결정하는데 있습니다. 소학교 수학에서 취급되는 순환소수는 주기성에 관한 문제의 하나입니다. 이 절에서는 주로 순환소수를 학습하게 됩니다.

실례 1. $\frac{3}{7}$을 순환소수로 고칠수 있습니다. 이 순환소수의 소수점뒤에 있는 1,997번째 자리에 있는 수는 얼마입니까?

따져보기 계속 나누어나가면 답을 찾을수 있습니다. 그러나 이렇게 하면 시간이 많이 걸리고 계산과정에 틀릴수도 있습니다. 간단한 방법을 찾아 이 문제를 풀어봅시다.

$\frac{3}{7}$은 가장 간단한 분수이므로 순환소수로 고치기 쉽습니다. 순환마디에는 6개의 수가 있습니다. 나누기식으로부터 $\frac{3}{7}$=0.(428571)이라는것을 알수 있습니다.

```
      0. 4  2  8  5  7  1  …
   7)3. 0
     2  8
        2  0
        1  4
           6  0
           5  6
              4  0
              3  5
                 5  0
                 4  9
                    1  0
                       7
                       3
```

이 갈기식은 소수점뒤에 있는 1, 7, 13, 19, …번째 자리에 있는 수는 모두 4, 소수점뒤에 2, 8, 14, 20, …번째 자리에 있는 수는 모두 2, 소수점뒤에 3, 9, 15, 21, …번째 자리에 있는 수는 모두 8, 소수점뒤에 4, 10, 16, 22, …번째 자리에 있는 수는 모두 5, 소수점뒤에 5, 11, 17, 23, …번째 자리에 있는 수는 모두 7, 소수점뒤에 6, 12, 18, 24, …번째 자리에 있는 수는 모두 1이라는것을 보여줍니다. 이 6가지 경우를 묶어서 다음과 같은 결론을 얻을수 있습니다. 소수점뒤의 몇번째 자리우에 있는 수가 얼마인가 하는것은 몇번째 자리의 몇을 6으로 나눈 나머지가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 0일 때 그에 대응하는것은 각각 4, 2, 8, 5, 7, 1이라는것입니다. 1,997을 6으로 나눈 나머지 즉 1,997÷6=332…5는 1,997을 6으로 나눈 나머지는 5이고 나머지 5에 대응하는 수는 7이므로 소수점뒤의 1,997번째 자리에 있는 수는 7이라는것을 알수 있습니다.

풀기 $\frac{3}{7}$=0.(428571)이므로 순환마디에는 6개의 수가 있습니다. 1,997÷6=332 …5이므로 분수 $\frac{3}{7}$을 소수로 고치면 소수점뒤로 1,997번째 자리에 있는 수는 7입니다.

[설명]

실례 1의 따져보기와 풀기에는 2개의 기본고리가 있는데 그 하나는 문제에 있는 순환주기의 주기수를 찾는것이고 다른 하나는 순환주기에 따라 분류한 다음 대응관계를 찾고 제기된 문제가 어느 부류에 속하는가를 구체적으로 판단하여 풀이를 찾는것입니다.

실례 2. 짝수 2, 4, 6, 8, …을 표－1에서처럼 5줄로 배렬하였습니다. 왼쪽으로부터 오른쪽의 순서로 제1렬, 제2렬, 제3렬, 제4렬, 제5렬이라고 부릅니다. 수 2,000은 몇렬에 있습니까?

표－1

	2	4	6	8
16	14	12	10	
	18	20	22	24
32	30	28	26	
	34	36	38	40
…				

따져보기 짝수들을 2로 나누면 옹근수들이 대응합니다. 실례를 들면

$$\begin{array}{cccccccc} 2, & 4, & 6, & 8, & \cdots & 1{,}998, & 2{,}000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 999 & 1{,}000 \end{array}$$

만일 표－1에 있는 짝수들을 2로 나누었을 때 얻어지는 옹근수를 다시 표－1에 제시된 규칙에 따라 차례로 배렬하여 표－2를 만듭니다. 수 1,000이 표－2의 어느 렬에 있는가를 알기만 하면 2,000이 표－1에서 어느 렬에 있는가를 알수 있습니다.

표－2

	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20
…				

표－2로부터 다음과 같은

사실을 알수 있습니다. 매 줄에 4개의 수가 있고 제 1, 3, 5, …번째 행은 왼쪽으로부터 오른쪽으로 가면서 차례로 1을 더하며 제 2, 4, 6, …번째 행은 왼쪽으로부터 오른쪽으로 가면서 차례로 1을 던것입니다. 제 1, 3번째 행의 같은 렬에 있는 두 수의 차는 모두 8입니다. 제 2,4번째 행의 같은 렬에 있는 두 수의 차도 모두 8입니다. 이것은 1, 2, 3, …의 배렬순서는 8개가 1개 주기이며 제1렬에 있는 수들은 모두 8로 말끔히 나누어집니다. 즉 8로 나누면 나머지가 0이 됩니다. 제2렬에 있는 1, 9, 17, 25, …를 8로 나누면 나머지가 1이 됩니다. 그리고 7, 15, 23, 31, …을 8로 나누면 나머지가 7이 됩니다. 제3렬에 있는 모든 수를 8로 나누면 나머지가 2가 아니라 6이 됩니다. 제4렬에 있는 수를 모두 8로 나누면 나머지가 3이 아니라 5입니다. 제5렬에 있는 수를 모두 8로 나누면 나머지가 4로 됩니다. 다시말하여 어떤 수를 8로 나눈 나머지가 1 또는 7이면 그것은 제2렬에 있으며 8로 나눈 나머지가 2 또는 6이면 그 수는 제3렬에 있습니다. 만일 8로 나눈 나머지가 3 또는 5이면 그 수는 제4렬에 있으며 나머지가 4이면 그 수는 제5렬에 있습니다. 나머지가 0이면 그 수는 제1렬에 있습니다. 1,000÷8=250이므로 수 1,000은 표-2의 제1렬, 수 2,000은 표-1의 제1렬에 있습니다.

표-1을 관찰하여 다음과 같은 결론을 얻을수 있습니다. 16으로 나눈 나머지가 0인 자연수는 모두 제1렬에 있고 16으로 나눈 나머지가 2 또는 14인 자연수는 모두 제2렬에 있으며 나머지가 4 또는 12인 자연수는 모두 제3렬에, 나머지가 6 또는 10인 자연수는 모두 제4렬에, 나머지가 8인 자연수는 모두 제5렬에 있습니다. 2,000÷16=125이므로 수 2,000은 표-1의 제1렬에 있습니다.

풀기 표-2에서 8개 수가 1개 주기이므로 8로 말끔히 나누어지는 자연수는 제1렬에, 나머지가 1 또는 7인 자연수는 제2렬에, 나머지가 2 또는 6인 자연수는 제3렬에, 나머지가 3 또는 5인 자연수는 제4렬에, 나머지가 4인 자연수는 제5렬에 있습니다. 1,000÷8=125이므로 수 1,000은 제

1렬에 있습니다. 즉 수 2,000은 표-1의 제1렬에 있습니다.

실례 3. 1988년 1월 1일은 금요일입니다. 2000년 1월 1일은 무슨 요일입니까?

따져보기 1주는 7일입니다. 1988년 1월 1일부터 시작하여 날자수와 요일사이의 대응관계를 표로 만들어 규칙을 찾아봅시다.

표-3

1988년 1월 1일부터 시작한 날자수와 요일사이의 관계						요일
1	8	15	22	29	…	금요일
2	9	16	23	30	…	토요일
3	10	17	24	31	…	일요일
4	11	18	25	32	…	월요일
5	12	19	26	33	…	화요일
6	13	20	27	34	…	수요일
7	14	21	28	35	…	목요일

표-3으로부터 다음과 같은 사실을 알수 있습니다. 1988년 1월 1일부터 시작하여 날자수를 7로 나눈 나머지가 1일 때 이날은 금요일입니다. 날자수를 7로 나눈 나머지가 2일 때 이 날은 토요일입니다. 날자수를 7로 나눈 나머지가 3일 때 이 날은 일요일, 나머지가 4일 때 이 날은 월요일, 나머지가 5일 때 이 날은 화요일, 나머지가 6일 때 이 날은 수요일, 나머지가 0일 때 이 날은 목요일입니다.

이렇게 되여 문제는 1988년 1월 1일부터 시작하여 2000년 1월 1까지 몇날인가를 계산하는데로 넘어갑니다.

1988년 1월 1일부터 2000년 1월 1일까지의 사이는 12년입니다. 1년은 365일이므로 12년은 4,380일입니다.

1988년 1월 1일부터 2000년 1월 1일까지의 12년가운데 4년에 한번씩 윤년이 있습니다. 그런데 100년은 윤년이 아니며 400년은 또 윤년으로 규정하였습니다. 1988년, 1992, 1996년은 윤년입니다. 그러므로 3일과 2000년 1월 1

일을 더하면 1988년 1월 1일부터 시작하여 2000년 1월 1일까지의 날자수는 (365×12+3+1)=4,384일이 됩니다.

$$4,384 \div 7 = 626 \ldots 2$$

따라서 2000년 1월 1일은 토요일입니다.

풀기 2000−1988=12, 365×12+3+1=4,384

$$4,384 \div 7 = 626 \ldots 2$$

1988년 1월 1일부터 시작하여 2000년 1월 1일까지의 날자수를 7로 나누었을 때 나머지가 2인 날은 토요일입니다.

답. 2000년 1월 1일은 토요일입니다.

실례 4. $16^{1,995}+17^{1,996}+18^{1,997}$을 5로 나누었을 때의 나머지를 구하십시오.

따져보기 어떤 수를 5로 나누었을 때의 나머지는 이 수의 하나자리수를 5로 나누었을 때의 나머지입니다. 주어진 문제의 세 수의 하나자리수가 얼마인가를 봅시다.

먼저 $16^{1,995}$의 하나자리수가 얼마인가를 구하기 위하여 여기에 어떤 규칙이 없는가를 따져봅시다. 임의의 자연수를 a로 표시하고 a^2, a^3, a^4, a^5, …의 하나자리수가 얼마인가를 봅니다. 다음과 같은 표를 만듭니다.

표−4

a의 하나자리수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2의 하나자리수	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^3의 하나자리수	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^4의 하나자리수	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
a^5의 하나자리수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^6의 하나자리수	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^7의 하나자리수	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^8의 하나자리수	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

표−4로부터 다음과 같은 사실을 알수 있습니다. 하나자리수가 0, 1, 5, 6인 자연수는 a의 몇제곱인가에 관계없이 그것의 하나자리수는 변하지 않고 0, 1, 5, 6입니다. 또

자연수 a의 하나자리수가 몇인가에 관계없이 a^5과 a의 하나자리수는 같습니다. 이 규칙에 의하여 a^6과 a^2, a^7과 a^3, a^8과 a^4, a^9과 a, a^{10}과 a^2, …의 하나자리수는 같습니다. 이밖에 4보다 큰 어깨수에 대해서는 5=4×1+1, 6=4×1+2, 7=4×1+3, 8=4×1+4, 9=4×2+1, 10=4×2+2 …가 됩니다. 다시말하여 a^n의 하나자리수는 n의 변화에 따라 순환하여 되풀이됩니다. 일반적으로 a^{4k+1}과 a, a^{4k+2}과 a^2, a^{4k+3}과 a^3, a^{4k+4}와 a^4, (여기서 k는 자연수)의 하나자리수는 같습니다.

이와 같은 결론을 리용하여 풀이를 구합니다. 1,995=4×498+3, 1,996=4×498+4, 1,997=4×499+1이므로 $16^{1,995}$과 16^3, $17^{1,996}$과 17^4, $18^{1,997}$과 18의 하나자리수는 같습니다. 16^3, 17^4, 18의 하나자리수는 6, 1, 8 즉 $16^{1,995}$, $17^{1,996}$, $18^{1,997}$을 5로 나눈 나머지는 각각 6, 1, 8을 5로 나눈 나머지입니다. 이 3개의 나머지는 각각 1, 1, 3입니다. 따라서 1+1+3=5, 5÷5=1이므로 답은 0입니다.

풀기 $16^{1,995}$, $17^{1,996}$, $18^{1,997}$을 5로 나눈 나머지는 각각 1, 1, 3입니다. 그러므로 1+1+3=5, 5÷5=1입니다.

답. $16^{1,995}+17^{1,996}+18^{1,997}$을 5로 나눈 나머지는 0입니다.

련습 11

1. 그림 11－1에 지적한 순서에 따라 손가락을 꼽습니다. 2,000에 이르렀을 때 어느 손가락이 됩니까?

2. $\frac{3}{14}$을 소수로 고치면 1,997번째 자리수는 얼마입니까?

3. 1,997개 자리수 $\underbrace{222\cdots222}_{1,997개}$를 13으로 나누면 나머지가 얼마입니까?

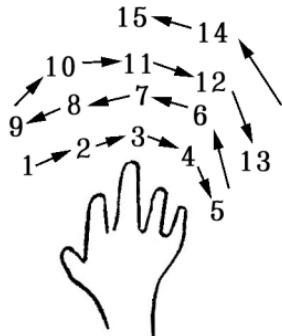



그림 11 － 1

4. $13^{1,001} \times 17^{1,002} \times 19^{1,003}$의 하나자리수는 얼마입니까?
5. $1,997^{10}$을 7로 나눈 나머지를 구하십시오.

답 및 풀기방향

1. 두번째손가락 2. 8 3. 5 4. 3 5. 2

제12절. 규칙찾기

간단한 실례들을 푸는 과정에 알수 있는바와 같이 문제에 들어있는 규칙을 찾을줄 아는 사고방법을 키우는것은 학습에서 해결하여야 할 중요한 과제라고 말할수 있습니다. 먼저 몇개의 사실들로부터 끌어낸 규칙이 모든 사실들에 다 맞는가를 따져보는것은 응용문제를 푸는데서 중요한 방법의 하나입니다. 이제 몇개의 실례를 들어봅시다.

실례 1. 어떤 아빠트에 올라가는 계단이 20개 있습니다. 계단을 오를 때 매번 한계단 또는 두계단씩만 올라갈수 있다고 규정하면 땅으로부터 20개 계단을 오르는데 서로 다른 몇가지 오르기방법이 있습니까?

따져보기 만일 계단이 1개뿐이면 한가지 오르기방법만 있습니다(그림 12－1).

그림 12 － 1

계단이 2개뿐이면 두가지 오르기방법이 있습니다(그림 12－2).

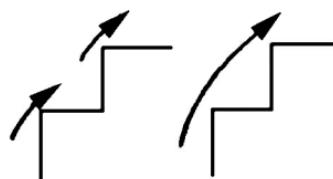
계단이 3개뿐이면 세가지 오르기방법이 있습니다(그림 12－3).

계단이 4개이면 5가지 오르기방법이 있습니다(그림 12－4).

그림 12 － 2

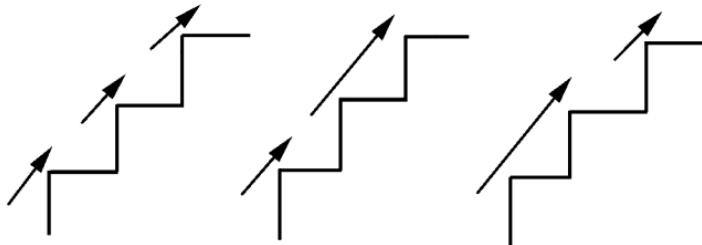



그림 12－3

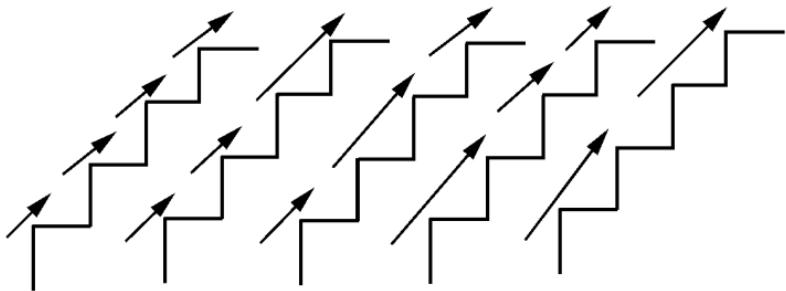



그림 12－4

이 결과들을 종합하여 그것들사이에 어떤 규칙이 있는가를 봅시다.

a_1, a_2, a_3, a_4 등 글자로써 계단이 1개, 2개, 3개, 4개일 때 땅으로부터 가장 웃쪽에 있는 계단까지 올라가는 서로 다른 오르기방법의 총수를 표시하면 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$가 됩니다.

여기서 $a_3=a_1+a_2$, $a_4=a_2+a_3$ 즉 세번째 수부터 시작하여 매 수는 그 앞에 있는 두 수의 합과 같다는것을 알수 있습니다. 이제 이 규칙이 일반성을 가지는가를 따져봅시다. a_5를 봅시다. 5개 계단이면 땅으로부터 시작하여 첫 걸음에는 두가지 경우가 있을수 있습니다. 즉 그중의 한가지는 한개 계단을 올라가는것입니다. 이때 그우에 4개 계단이 있습니다. 이 4개 계단을 올라가는 서로 다른 방법의 가지수는 a_4입니다. 다른 한가지는 2개 계단을 올라가는것

입니다. 이때 그 우에 3개 계단이 더 있습니다. 이 계단을 올라가는 서로 다른 방법의 가지수는 a_3입니다. 그러므로 $a_5=a_3+a_4$입니다.

꼭 같은 방법으로 계단이 n개이면 땅으로부터 시작하여 두가지 경우가 있습니다. 그 하나는 한개 계단만 올라가는것인데 이때 그 우에는 $(n-1)$개 계단이 있게 됩니다. 이 $(n-1)$개 계단을 올라가는 서로 다른 오르기방법은 a_{n-1}입니다. 다른 하나는 2개 계단을 올라가는것인데 이때에는 그 우에 $(n-2)$개의 계단이 있게 됩니다. 이 $(n-2)$개 계단을 올라가는 서로 다른 오르기방법은 a_{n-2}입니다. 그러므로 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$입니다. 따라서 n이 2보다 큰 자연수일 때 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, $a_1=1$, $a_2=2$입니다.

풀기 우에서 얻은 규칙에 따라 풀어봅시다.

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$$

이므로

$a_3=a_1+a_2=3$, $a_4=a_2+a_3=5$
$a_5=a_3+a_4=8$, $a_6=a_4+a_5=13$
$a_7=a_6+a_5=21$, $a_8=a_7+a_6=34$
$a_9=a_8+a_7=55$, $a_{10}=a_9+a_8=89$
$a_{11}=a_{10}+a_9=144$, $a_{12}=a_{11}+a_{10}=233$
$a_{13}=a_{12}+a_{11}=377$, $a_{14}=a_{13}+a_{12}=610$
$a_{15}=a_{14}+a_{13}=987$, $a_{16}=a_{15}+a_{14}=1,597$
$a_{17}=a_{16}+a_{15}=2,584$, $a_{18}=a_{17}+a_{16}=4,181$
$a_{19}=a_{18}+a_{17}=6,765$, $a_{20}=a_{19}+a_{18}=10,946$

답. 모두 10,946가지 방법이 있습니다.

실례 2. 1×2인 직4각형 [|]으로 2×8인 직4각형을 피복하려고 합니다. 서로 다른 피복방법에는 몇가지가 있습니까?(그림 12－5)

따져보기 피복한다는것은 정해진 도형으로 어떤 고정된 도형을 덮는다는

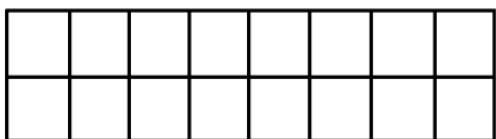



그림 12 － 5

것입니다. 피복할 때 정해진 도형이 서로 겹치지 말아야 하며 피복되는 고정된 도형의 모든 부분이 덮여야 합니다.

실례 1에서와 마찬가지로 간단한 경우부터 따져나갑시다. a_1, a_2 …, a_n으로서 1×2인 직4각형을 써서 2×1, 2×2, …, 2×n인 직4각형모양의 그물을 피복하는 서로 다른 피복방법의 총가지수를 표시합니다(그림에서 서로 이웃한 2개의 직4각형을 련결한 선분은 피복을 표시합니다). 1×2인 직4각형으로 2×1인 직4각형그물을 피복할수 있는 방법은 한가지이므로 a_1=1입니다(그림 12－6).

그림 12 － 6

1×2인 직4각형으로 2×2인 직4각형그물을 피복할수 있는 방법은 두가지이므로 a_2=2입니다(그림 12－7).

1×2인 직4각형으로 2×3인 직4각형그물을 피복할 때 두가지 경우로 갈라서 생각할수 있습니다. 먼저 가로방향으로 피복하는 경우입니다. 그림 12－8(1)에서 보는바와 같이 2개인 1×2인 직4각형으로 왼쪽에 있는 4개의 작은 직4각형을 피복한 다음 1개의 2×1인 직4각형그물이 남습니다. 이때 피복하는 방법의 가지수는 a_1입니다. 다시 세로방향으로 피복합니다. 그림 12－8(2)에서와 같이 1개의 1×2인 직4각형으로 왼쪽에 있는 2개의 직4각형을 피복하면 오른쪽에 1개의 2×2인 직4각형이 남습니다. 피복방법의 가지수는 a_2입니다. 그러므로 a_3=a_2+a_1입니다.

꼭같이 그림 12－9로부터 a_4=a_3+a_2이라는것을 알수 있습니다.

(1) (2)

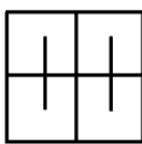
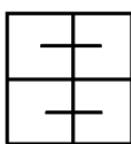
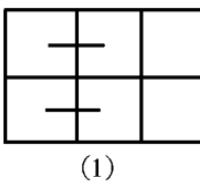
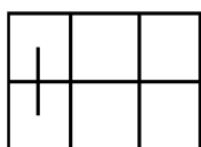



그림 12 － 7 그림 12 － 8

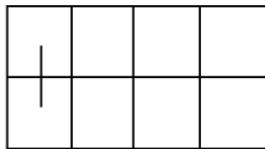
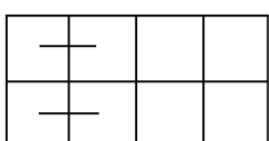



그림 12 – 9

이렇게 하여 n이 2보다 큰 자연수일 때 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_1=1$, $a_2=2$이라는 규칙을 찾을수 있습니다.

풀기 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_1=1$, $a_2=2$이므로 $a_3=a_1+a_2=3$, $a_4=a_3+a_2=5$, $a_5=a_4+a_3=8$, $a_6=a_5+a_4=13$, $a_7=a_6+a_5=21$, $a_8=a_7+a_6=34$입니다. 1×2인 직4각형으로 2×8인 직4각형그물을 피복할수 있는 방법은 모두 34가지입니다.

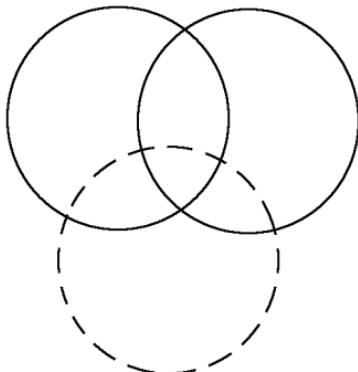
답. 34가지 있습니다.

실례 3. 10개의 원이 가장 많아서 몇개의 사귐점을 가집니까?

따져보기 a_2, a_3, … a_n 등 글자로 2개, 3개, … n개의 원이 사귀였을 때 가장 많은 사귐점의 개수를 표시합니다. $a_2=2$입니다.

3개의 원이 사귀는 경우를 봅시다. 사귐점의 개수가 가장 많게 하기 위하여 세번째 원은 반드시 두 원과 사귀게 합니다. 그림 12－10에서 보는바와 같이 본래의 2개의 사귐점외에 4개의 사귐점이 더 많아졌습니다. 그러므로 $a_3=a_2+4=a_2+2\times2$입니다.

그림 12 – 10

4개의 원이 사귀는 경우를 봅시다. 사귐점의 개수가 많게 하기 위하여 네번째 원은 반드시 앞의 세원과 사귀게 합니다.

두원이 사귀면 많아서 2개의 사귐점이 얻어집니다. 그림 12－11에서 보는바와 같이 본래의 사귐점외에 3×2개의 사귐점이 또 생깁니다. 그러므로

$$a_4=a_3+3\times2$$

입니다. $a_3=a_2+2\times2$와 $a_4=a_3+3\times2$에서 앞에 있는 수는 원과의 사귐점의 개수이며 뒤에 있는 수는 마지막원이 사귐으로 해서 생기는 사귐점의 개수입니다. 마지막원이 사귐으로 해서 생기는 사귐점의 개수는 사귀는 원의 개수에서 1을 덜고 2를 곱한 적입니다. 그러므로 n이 3보다 큰 자연수일 때

그림 12 － 11

$$a_n=a_{n-1}+2\times(n-1),\ a_2=2$$

가 얻어집니다.

풀기 $a_n=a_{n-1}+2\times(n-1),\ a_2=2$이므로

$a_3=a_2+2\times2=6,\ a_4=a_3+2\times3=12$

$a_5=a_4+2\times4=20,\ a_6=a_5+2\times5=30$

$a_7=a_6+2\times6=42,\ a_8=a_7+2\times7=56$

$a_9=a_8+2\times8=72,\ a_{10}=a_9+2\times9=90$

답. 10개의 원은 가장 많아서 90개의 사귐점을 가집니다.

실례 4. 평면우에 있는 6개의 3각형이 가장 많아서 평면을 몇개의 부분으로 가를수 있습니까?

따져보기 2개의 3각형이 평면을 가를 때 가장 많이 생기는 평면의 개수를 글자 a_1, a_2로 표시하면 $a_1=2$이 됩니다.

다시 2개의 3각형인 경우를 봅시다. 2개의 3각형이 평면을 가를 때 갈라지는 부분의 개수가 가장 많게 되는 경우는 두번째 3각형의 매 변과 첫번째 3각형의 세변이 사귀며 사귐점이 3각형의 정점에 놓이지 않는 경우입니다.

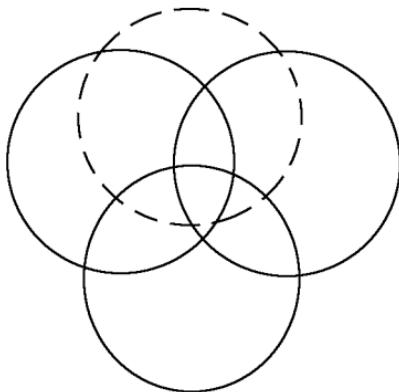



그림 12－12에서 보는바와 같이 첫번째 3각형이 평면을 안쪽과 바깥쪽의 두 부분으로 가르고 두번째 3각형의 매 변이 첫번째 3각형의 어느 한변에 의하여 세 토막으로 갈라지는데 가운데 한 토막은 본래의 한 부분을 여러부분으로 가릅니다. 세 변에 의하여 1×3개 부분만큼 더 많아지고 그밖의 매변의 두 끝부분은 3개의 새로운 각을 만들며 또 3개 부분만큼 더 많아지므로 $a_3=a_1+1\times 3+3=8$이 됩니다.

그림 12 － 12

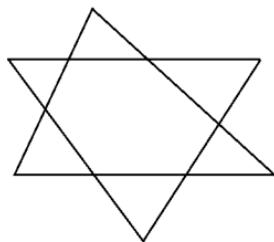
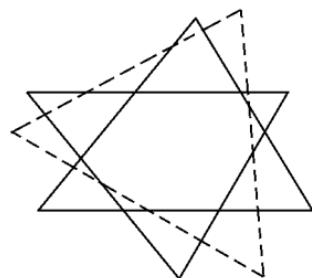
다시 3각형이 3개인 경우를 봅시다. 그것들이 평면을 가르는 개수가 가장 많은 경우는 다음과 같이 가를 때입니다. 세번째 3각형의 매 변과 앞의 2개 3각형에서 매 3각형의 2개 변이 사귀고 사귐점이 3각형의 정점에 놓이지 않도록 해야 합니다. 그림 12－13에서 보는바와 같이 2개의 3각형은 가장 많아서 평면을 8개 부분으로 가르며 세번째 3각형의 매 변은 두 3각형에 의하여 5개 토막으로 갈라지며 가운데 세토막의 매 토막은 본래의 어느 한 부분을 3개 부분씩 더 많게 가르며 따라서 세 변은 3×3부분만큼 더 많아지게 합니다. 매 변의 량끝부분은 또 3개의 새로운 각을 만들고 또 3개 부분이 더 많아집니다. 그러므로 $a_3=a_2+3\times 3+3=20$이 됩니다.

그림 12 － 13

꼭같이 $a_4=a_3+3\times 5+3$이고 $1=2\times 2-3$, $3=2\times 3-3$, $5=2\times 4-3$, …이 된다는것을 알수 있습니다.

따라서 n개의 3각형은 가장 많아서 평면을

$$a_n=a_{n-1}+3\times(2n-3)+3,\ a_2=2$$

로 가릅니다.

풀기 $a_n=a_{n-1}+3\times(2n-3)+3$, $a_2=2$이므로

$a_2=a_1+3\times1+3=8$, $a_3=a_2+3\times2+3=20$

$a_4=a_3+3\times5+3=38$, $a_5=a_4+3\times7+3=62$

$a_6=a_5+3\times9+3=92$

평면우에 있는 6개의 3각형은 평면을 가장 많아서 92개 부분으로 가를수 있습니다.

[설명]

이상의 실례들을 통하여 알수 있는바와 같이 비교적 복잡한 문제를 풀 때 간단한 경우에서 규칙을 찾은 다음 일반화하여 문제를 풀어나가야 합니다. 이와 같은 추리방법을 귀납추리라고 합니다.

련습 12

1. 어떤 사람이 계단을 오르는데 한 걸음에 1개 또는 3개 계단씩 오를수 있습니다. 계단이 모두 10개 있습니다. 아래계단으로부터 높은 계단까지 올라가려면 서로 다른 몇가지 오르기방법이 있습니까?

2. 성냥가치가 10대 있습니다. 매번 1대, 2대, 3대씩 취할수 있습니다. 이 규칙에 따라 10대를 취하려면 서로 다른 몇가지 방법이 있습니까?

3. 종이에 원을 그려 잘라내였습니다. 이 종이쪼각을 직선을 리용하여 크기에 제한없이 몇개의 작은 쪼각으로 갈라놓으려고 합니다. 만일 50개보다 작지 않은 쪼각으로 갈라놓으려 한다면 적어도 몇가지 직선을 그을수 있습니까?

4. 5개의 4각형이 가장 많아서 평면을 몇개의 부분으로 가를수 있습니까?

5. 1×2인 직4각형 ☐☐ 또는 1×3인 직4각형 ☐☐☐ 으로 2×6인 직4각형그물을 피복하려면 서로 다른 몇가지 방법이 있습니까?

답 및 풀기방향

1. $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-3}$, 모두 28가지
2. $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, 모두 274가지
3. $a_1=2, a_n=a_{n-1}+n$, 모두 10가지
4. $a_1=2, a_n=a_{n-1}+8\times(n-1)$, 모두 82가지
5. 30가지
   1×2인 직4각형으로 피복할수 있는 방법은 13가지, 1×3인 직4각형으로 피복할수 있는 방법은 1가지, 두가지 다 써서 피복할수 있는 방법은 16가지입니다.

제13절. 규칙을 찾아 응용문제풀기

앞에서 순환, 귀납법을 리용하여 응용문제를 푸는 방법을 학습하였습니다. 그런데 모든 문제들에는 순환, 귀납법에 의하여 풀리는것도 있고 풀리지 않는것도 있습니다. 하지만 풀리지 않는 문제들에도 규칙들이 들어있습니다. 다음과 같은 몇개의 실례들을 들어봅시다.

실례 1. 다음과 같은 수표가 있습니다.

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}$$

이 5개의 행에 표시된 수들의 규칙을 찾아 $\frac{1{,}991}{1{,}949}$이 몇번째 행에 있으며 왼쪽에서 오른쪽으로 가면서 몇번째 자리에 있는가를 밝히십시오.

따져보기 제1행에 1개의 분수가 있고 제2행에 2개의 분수, 제3행에 3개의 분수, 제4행에 4개의 분수, 제5행에 5개의 분수가 있으므로 매 행에 있는 분수의 개수는 그 행의 번호와 같습니다.

그리고 분수들의 분모는 그 행에 있는 분수의 개수까지 커지고 분자는 분수의 개수에서 1까지 변합니다.

분수의 분자와 분모의 합은 행번호에 1을 더한것과 같습니다. 실례를 들면 제3행에는 3개의 분수 $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$이 있고 그것들의 분자와 분모의 합은 4이며 4=3+1입니다.

매 행에 있는 분수의 분모는 이 분수가 행의 왼쪽에서부터 몇번째자리에 있는가를 표시합니다.

풀기 우에서 지적한 규칙으로부터 $\frac{1{,}991}{1{,}949}$이 놓여있는 행은 (1,991+1,949－1=)3,933번째 행이며 왼쪽으로부터 1,949번째 자리에 있다는것을 알수 있습니다.

답. $\frac{1{,}991}{1{,}949}$은 3,933번째 행에 있으며 왼쪽으로부터 1,949번째 자리에 있습니다.

실례 2. 눈금종이에 꺾인선을 긋습니다. 바른4각형의 한변의 길이는 1cm입니다. 꺾인선의 매 직선에는 번호 ①, ②, ③, …이 달려있습니다(그림 13－1).

1) 번호가 ㊾인 직선의 길이는 얼마입니까?

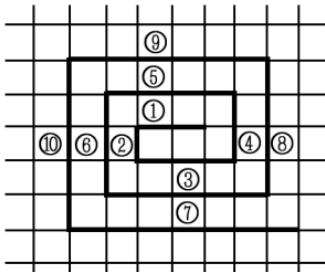



그림 13 － 1

2) 길이가 28cm인 직선의 번호는 얼마입니까?

따져보기 계산하기 쉽게 하기 위하여 번호와 그에 대응하는 길이를 표로 만듭니다.

번호	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	…
길이	2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	…

먼저 번호가 짝수인 경우를 보면 번호가 ②일 때 그 길이는 1cm이며 번호가 ④일 때 그 길이는 2cm, 번호가 ⑥일 때 그 길이는 3cm, 번호가 ⑧일 때 그 길이는 4cm, 번호가 ⑩일 때 그 길이는 5cm입니다. 따라서 번호가 ($2k$)인 직선의 길이는 $2k \div 2$(k는 자연수)입니다.

번호가 홀수인 경우를 보면 번호가 ①일 때 그 길이는 2cm, 번호가 ③일 때 그 길이는 3cm, 번호가 ⑤일 때 그 길이는 4cm, 번호가 ⑦일 때 그 길이는 5cm, 번호가 ⑨일 때 그 길이는 6cm입니다. 따라서 직선의 길이를 2배로 확대한다면 다음과 같은 관계가 성립합니다.

번호	①	③	⑤	⑦	⑨	…
길이×2	4	6	8	10	12	…

$4-1=6-3=8-5=10-7=12-9=\cdots=3$입니다.

이로부터 다음과 같은 규칙을 얻을수 있습니다. 번호가 ($2k+1$)인 직선의 길이는 $(2k+1+3) \div 2$입니다.

두 규칙을 다음과 같이 간단히 표시할수 있습니다.

번호가 짝수인 직선의 길이는 번호÷2 입니다.

번호가 홀수인 직선의 길이는 (번호+3)÷2 입니다.

풀기 1) 번호 (69) 는 홀수이므로 직선의 길이는

$$(69+3) \div 2 = 36(\text{cm})$$

입니다.

2) 대응하는 번호가 짝수일 때 $28 \times 2 = 56$(cm)이고 이때 직선의 번호는 (56) 입니다.

대응하는 번호가 홀수일 때 $28 \times 2 - 3 = 53$(cm)이고 이때 직선의 번호는 (53)입니다.

실례 3. 그림 13－2와 같이 직선우에 두 점 A, B가 있는데 그 사이의 거리는 1cm이고 점 A, B우에 각각 한마리의 청개구리가 있습니다. 점 A에 있는 청개구리는 직선을 따라 점 B를 대칭중심으로 한 대칭점 A_1에 뛰여가고 점 B에 있는 청개구리는 점 A를 대칭중심으로 한 대칭점 B_1에 뛰여갑니다. 다음 점 A_1에 있던 청개구리는 점 B_1에 관한 대칭점 A_2에 뛰여가고 점 B_1에 있던 청개구리는 점 A_1에 관한 대칭점 B_2에 뛰여갑니다. 두마리의 청개구리가 각각 17번 뛰였다면 점 A에 있던 청개구리가 뛰여간 위치로부터 점 B까지의 거리는 얼마입니까?

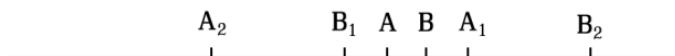



그림 13 － 2

따져보기 먼저 두마리의 청개구리가 각각 한번, 두번, 세번, 네번 뛴 다음 점 A에 있던 청개구리가 뛰여간 위치로부터 점 B까지의 거리를 계산합니다(그림 13－3).

두마리의 청개구리가 한번 뛰였을 때 점 A_1로부터 점 B까지의 거리는 1cm이고 점 B_1로부터 점 B까지의 거리는 2cm입니다.

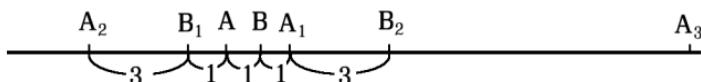



그림 13 － 3

두마리의 청개구리가 두번 뛰였을 때 점 A_2로부터 점 B까지의 거리는 (3+1+1=)5cm이고 점 B_2로부터 점 B까지의 거리는 (3+1=)4cm입니다.

두마리의 청개구리가 세번 뛰였을 때 점 A_3으로부터 점 B까지의 거리는 A_2B_2과 BB_2의 두 직선의 길이의 합과 같습니다. 즉 (9+3+1=)13cm입니다. 점 B_3으로부터 B까지의 거리

는 A_2B_2과 A_2B의 두 직선의 길이의 합 즉 (9+3+1+1=)14cm입니다.

두마리의 청개구리가 네번 뛰였을 때 점 A_4로부터 점 B까지의 거리는 A_3B_3과 BB_3의 두 직선의 길이의 합이고 점 B_4로부터 점 B까지의 거리는 A_3B_3과 BA_3의 두 직선의 길이의 합입니다.

A_1B_1의 길이는 3cm이고 A_2B_2의 길이는 A_1B_1길이의 3배 즉 $(3\times3=)3^2$cm입니다. A_3B_3의 길이는 A_2B_2의 길이의 3배 즉 $(3^2\times3=)3^3$cm입니다. 따라서 A_nB_n의 길이는 3^ncm라는것이 알려집니다.

이제 두 점 A, B사이의 거리를 부호 |AB|로 표시하면 다음과 같은 같기식이 얻어집니다.

$|A_1B|=1,\ |B_1B|=1+1=2,\ |A_1B_1|=3$

$|A_2B|=|A_1B_1|+|B_1B|=3+1+1,\ |BB_2|=3+1$

$|A_3B|=|A_2B_2|+|B_2B|=3^2+3+1$

$|B_3B|=|A_2B_2|+|A_2B|=3^2+3+1+1$

$|A_4B|=|A_3B_3|+|B_3B|=3^3+3^2+3+1+1$

$|B_4B|=|A_3B_3|+|A_3B|=3^3+3^2+3+1+1$

$|A_5B|=|A_4B_4|+|B_4B|=3^4+3^3+3^2+3+1$

$|B_5B|=|A_4B_4|+|A_4B|=3^4+3^3+3^2+3+1+1$

$|A_6B|=|A_5B_5|+|B_5B|=3^5+3^4+3^3+3^2+3+1+1$

…

우의 같기식으로부터 다음과 같은 결론이 얻어집니다.

n이 홀수일 때 $|A_nB|=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^2+3+1$

n이 짝수일 때 $|A_nB|=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^2+3+1+1$

풀기 17은 홀수이므로

$|A_{17}B|=1+3+3^2+\cdots3^{16}$

$=1+3+9+27+81+243+729+2,187+6,561+19,683+59,049+177,147+531,441+1,594,323+4,782,969+14,348,907+43,046,721$

$=64,570,081$(cm)

답. 17번 뛰면 점 A에 있던 청개구리가 뛰여간 위치로부터 점 B까지의 거리는 64,570,081cm입니다.

실례 4. 자연수를 1부터 시작하여 다음과 같이 배렬하였습니다.

1	2	4	7	11	16	…
3	5	8	12	17	…	
6	9	13	18	…		
10	14	19	…			
15	20	…				
21	…					
…						

1) 10행 5렬에 있는 수는 얼마입니까?
2) 5행 10렬에 있는 수는 얼마입니까?
3) 수 1,995는 몇행 몇렬에 있습니까?

따져보기 1행에서 이웃한 두 수의 차가 차례로 1, 2, 3, 4, 5, 6, …이라는것을 알수 있습니다. 즉 1행 n렬에 있는 수는 1에 1부터 시작하여 련이어 있는 n−1개 자연수의 합을 더한것과 같습니다. 실례를 들면 1행 12렬에 있는 수는

$$1+(1+2+3+\cdots+11)=1+66=67$$

입니다. 2행에서 이웃한 두 수의 차는 차례로 2, 3, 4, 5, 6, … 즉 2행 n렬에 있는 수는 3에 2부터 시작하여 련이어 있는 n−1개 자연수의 합을 더한것과 같습니다. 실례를 들면 2행 11렬에 있는 수는

$$3+(2+\cdots+11)=3+65=68$$

입니다. 3행에서 이웃한 두 수의 차는 3, 4, 5, 6, 7, … 즉 3행 n렬에 있는 수는 6에 3부터 시작하여 련이어 있는 n−1개 자연수의 합을 더한것과 같습니다. 실례를 들면 3행 10렬에 있는 수는

$$6+(3+4+\cdots+11)=6+63=69$$

입니다.

따라서 m행 n렬에 있는 수는 m행의 첫번째 수에 m부터 시작하여 련이어 있는 n−1개 자연수의 합을 더한것과 같다는것을 알수 있습니다.

먼저 매 행의 첫번째 수를 알아야 합니다. 그러자면

1렬에 어떤 규칙이 들어있는가를 알아야 합니다. 1렬에서 두 수의 차는 차례로 2, 3, 4, …이므로 m행의 첫번째 수는 1에 2부터 시작하여 련이어 있는 m－1개의 자연수의 합을 더한것과 같습니다.

풀기 1) 먼저 10행의 첫번째 수를 구합니다.

$$1+(2+3+\cdots+10)=1+54=55$$

다음 10행 5렬의 수를 구합니다.

$$55+(10+11+12+13)=101$$

따라서 10행 5렬에 있는 수는 101입니다.

2) 먼저 5행의 첫번째 수를 구합니다.

$$1+(2+3+4+5)=15$$

다음 5행 10렬에 있는 수를 구합니다.

$$15+(5+6+\cdots+13)=15+81=96$$

따라서 5행 10렬에 있는 수는 96입니다.

3) $1+(2+42)\times41\div2=903$이므로 42행의 첫번째 수는 903입니다. 그리고 $(42+62)\times21\div2=1{,}092$, $1{,}092+903=1{,}995$입니다. 이것은 1,995가 42행, 22렬의 수라는것을 보여줍니다.

[설명]

이 문제를 다음과 같은 방법으로도 풀수 있습니다. 자연수를 1부터 시작하여 차례로 오른쪽 웃방향에서 왼쪽 아래방향으로 그은 대각선에 따라 배렬하였다고 생각하면 첫번째 대각선에 1개의 수, 두번째 대각선에 2개의 수, … n번째 대각선에 n개의 수가 있습니다.

이제 행수와 대각선방향에 있는 수들사이의 관계를 봅시다.

수 1은 1행 1렬에 있고 첫번째 대각선에 있습니다.

수 2는 1행 2렬에 있고 두번째 대각선에 있습니다.

수 3은 2행 1렬에 있고 두번째 대각선에 있습니다.

수 4는 1행 3렬에 있고 세번째 대각선에 있습니다.

수 5는 2행 2렬에 있고 세번째 대각선에 있습니다.

수 6은 3행 1렬에 있고 세번째 대각선에 있습니다.

같은 대각선방향에 있는 매 수의 행수와 렬수의 합은 같고

$$\text{행수}+\text{렬수}-1=\text{대각선방향의 수}$$

그밖에 대각선방향의 수는 우로부터 아래로 내려가면서 배렬되여있고 어떤 수가 몇번째 행에 있는가 하는것은 그것이 대각선방향에서 우에서 아래로 내려가면서 몇번째에 있는가에 의하여 결정됩니다.

이 규칙을 리용하면 문제가 쉽게 풀립니다.

1) 10행 5렬에 있는 수는 몇번째 대각선우에 있습니까?

$$10+5-1=14$$

구하려는 수는 14번째 대각선의 10번째 자리에 있고

$$[1+2+\cdots+(10+5-2)]+10=101$$

입니다.

따라서 10행 5렬에 있는 수는 101입니다.

2) 5행 10렬에 있는 수는 몇번째 대각선우에 있습니까?

$$5+10-1=14$$

구하려는 수는 14번째 대각선의 5번째 자리에 있고

$$[1+2+\cdots+(5+10-2)]+5=96$$

입니다.

따라서 5행 10렬에 있는 수는 96입니다.

3) 1,995가 k번째 대각선방향에 배렬되였다면 $k-1$번째 대각선방향에 있는 수의 개수는

$$1+2+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1)$$

이 됩니다.

k=63일 때 $\frac{1}{2}k(k-1)$=1,953입니다. 이것은 62번째 대각선방향에 있는 마지막수가 1,953이라는것을 보여주므로 1,995는 63번째 대각선방향에 있는 (1,995−1,953=)42번째 수 즉 1,995는 63번째 대각선우에서 42번째 자리에 있습니다.

다시

$$\text{렬수}=\text{대각선방향의 수}+1-\text{행수}$$

이고 63+1－42=22가 됩니다.

이것은 1,995가 42행 22렬에 있다는것을 보여줍니다.

련습 13

1. 두 물병 A, B가 있습니다. A에는 물이 1kg 들어있고 B는 비여있습니다. 먼저 A의 물의 $\frac{1}{2}$을 B에 넣습니다. 두번째로 B의 물의 $\frac{1}{3}$을 A에 넣습니다. 세번째로 A의 물의 $\frac{1}{4}$을 B에 넣습니다. 네번째로 B의 물의 $\frac{1}{5}$을 A에 넣습니다. …이와 같은 방법을 1,994번 진행하면 A의 물은 얼마로 됩니까?

2. 그림 13－4와 같이 눈금종이에 꺾인선을 그립니다. 바른4각형의 한변의 길이는 1cm입니다. 점 A부터 시작하여 직선에 번호를 붙입니다.

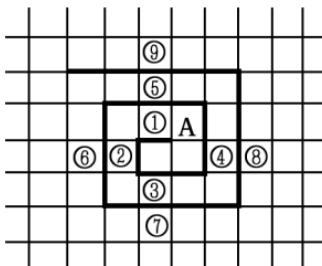
1) 번호가 1,994인 직선의 길이는 얼마입니까?

2) 길이가 1,994인 직선의 번호는 얼마입니까?

그림 13 － 4

3. 분수 $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; …에서

1) $\frac{7}{10}$은 몇번째 분수입니까?

2) 400번째, 1,997번째 분수는 얼마입니까?

4. 그림 13－5와 같이 자연수를 작은수부터 큰수의 순서로 배렬하였습니다. 2는 첫번째 꺾임, 3은 두번째 꺾임, 5는 세번째 꺾임 …에 있습니다. 20번째 꺾임위치에 있는 수는 얼마입니까?

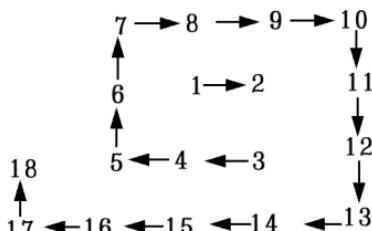



그림 13 － 5

5. 다음과 같은 수표가 있습니다.

1	3	6	10	15	…
2	5	9	14	…	
4	8	13	…		
7	12	…			
11	…				
…					

1) 5행 12렬의 수는 얼마입니까?

2) 수 253은 몇행, 몇렬에 있습니까?

답 및 풀기방향

1. $\frac{998}{1,995}$

2. 1) $1,994\div2=997$

   2) $1,994\times2-1=3,987$ 또는 $1,994\times2=3,988$

3. 1) 88번째, 94번째 2) $\frac{1}{20}$, $\frac{29}{45}$

4. 111

5. 1) 132 2) 3행 8렬

제14절. 간단한 방정식을 세워 응용문제풀기

지금까지 많은 응용문제들을 산수적인 방법으로 풀었습니다. 이제 간단한 방정식을 리용하여 응용문제를 어떻게 풀겠는가를 봅시다.

어떤 수에 2를 더하고 거기에서 3을 덜어 얻은 차에 4를 곱하고 그것을 다시 5로 나누면 12가 얻어집니다. 이 수는 얼마입니까?

먼저 산수적방법을 써서 풉니다. 12부터 시작합니다. 12는 적을 5로 나눈 상이므로 적은 $(12\times5=)60$입니다. 이 60은 차에 4를 곱하여 얻은 수이므로 차는 $(60\div4=)15$이며 15는 덜릴수에서 3을 던 결과이므로 덜릴수는 $(15+3=)18$입니다. 18은 이 수에 2를 더하여 얻은것이므로 이 수는 $(18-2=)16$입니다. 이것은 구하려는 수가 16이라는것을 말해줍니다.

다음 방정식을 리용하여 풀어봅시다. 먼저 구하려는 어떤 수를 x라고 하고 문제의 내용에 따라 다음과 같은 방정식을 세울수 있습니다.

$$(x+2-3)\times4\div5=12$$

이 식을 풀면

$$(x-1)\times4\div5=12$$
$$(4x-4)\div5=12$$
$$4x-4=60$$
$$x-1=15$$
$$x=16$$

두가지 풀이법을 대비하면 다음과 같은것을 알수 있습니다. 산수적방법으로 응용문제를 풀면 구하려는 량을 직접 산수식으로 표시하고 방정식을 세워 응용문제를 풀면 구하려는 량을 글자로 표시한 다음 같기관계를 찾아 주어진 수와 글자로 표시하고 마지막에 이 글자에 해당한

수를 구해야 합니다. 흔히 방정식을 세워 푸는것이 산수식을 써서 푸는것보다 간단합니다.

실례 1. 어떤 공장기계공장에서 1월 한달동안에 198대의 공작기계를 생산하였는데 이것은 지난해 같은 달 생산량의 2배보다 36대가 더 많습니다. 지난해 1월의 생산량은 얼마입니까?

따져보기 지난해 1월 생산량을 x라고 하고 수량들사이에 같기관계를 리용하여 방정식을 세웁니다.

지난해 1월 생산량이 x대이므로 그것의 2배는 $2x$대입니다. 또 지난해 1월 생산량의 2배에 36대를 더하면 올해 1월 생산량인 198대가 됩니다. 방정식을 세우면

$$2x+36=198$$

풀기 $2x+36=198$

$2x=198-36$

$2x=162$

$x=81$

답. 지난해 1월에는 81대 생산하였습니다.

실례 2. 어떤 작업반의 논면적과 밭면적은 모두 208ha입니다. 논면적은 밭면적보다 62ha 더 많습니다. 논면적과 밭면적은 각각 몇ha입니까?

따져보기 논면적 혹은 밭면적을 x로 놓고 계산할수 있습니다. 밭면적을 x로 놓으면 작업반의 총 면적이 208ha이므로 논면적은 $208-x$입니다. 논면적은 밭면적보다 62ha 더 많다는 조건을 리용하여 방정식을 세울수 있습니다.

풀기 $208-x=x+62$

$2x=208-62$

$2x=146$

$x=73$

논면적은 $208-x$이므로 $208-73=135$입니다.

답. 논은 135ha이고 밭은 73ha입니다.

[설명]

만일 논면적을 x라고 하면 방정식 $x+(x+62)=208$이 성

립합니까?

우의 실례들로부터 방정식을 세워 응용문제를 푸는 순서는 다음과 같습니다.

1. 문제의 뜻을 정확히 리해하여야 합니다. 어느것이 아는 량이고 어느것이 모르는 량이며 그것들사이에 어떤 관계가 성립하는가를 밝혀야 합니다. 모르는 량을 선택하여 그것을 글자 x(다른 글자 y, z도 쓸수 있습니다.)로 표시합니다. 그리고 모르는 량이 여러개일 때에는 아는 량과 모르는 량사이의 관계에 의하여 x를 포함한 식을 만들어 나머지 모르는 량을 표시합니다.

2. 우의 관계에 의하여 방정식을 세웁니다.

3. 작성된 방정식을 풉니다.

4. 방정식의 풀이에 의하여 문제에서 요구하는 량을 구하고 검산한 다음 답을 써야 합니다.

실례 3. 자동차로 짐을 운반하려고 합니다. 한대에 3.5t씩 실으면 2t이 남고 한대에 4t씩 실으면 주어진 짐을 다 운반하고도 1t을 더 운반할수 있습니다. 본래 몇t의 짐이 있었습니까?

따져보기 실례 1과 실례 2에서처럼 물음에 제기한 량을 x로 잡습니다. 즉 운반해야 할 짐을 xt이라고 합시다. 한대에 3.5t씩 싣는다면 운반해야 할 짐은 $(x-2)$t이며 이때 자동차는 $\frac{x-2}{3.5}$대가 있어야 합니다. 만일 한대에 4t씩 싣는다면 운반해야 할 짐은 $(x+1)$t이 됩니다. 이때 자동차는 $\frac{x+1}{4}$대 있어야 합니다. 자동차대수는 같으므로 다음과 같은 방정식을 세울수 있습니다.

$$\frac{x-2}{3.5}=\frac{x+1}{4}$$

이 방정식을 풀자면 비례관계에 대한 지식을 알아야 하므로 다른 방법으로 풀어봅시다.

문제에서 짐이 몇t인가고 물었으므로 짐을 운반하는 자동차의 대수만 알면 짐이 몇t인가를 알수 있습니다. 짐을 운반하는 자동차의 대수를 x라고 합시다. 만일 한대의 자동차에 3.5t씩 싣는다면 운반할 짐은 $(3.5x+2)$t이 되며 한대의 자동차에 4t씩 싣는다면 운반할 짐은 $(4x-1)$t이 됩니다. 방정식을 세우면

$$3.5x+2=4x-1$$

이 됩니다.

풀기 $3.5x+2=4x-1$

$2+1=4x-3.5x$

$0.5x=3$

$x=6$

$x=6$을 $4x-1$에 넣으면 $4\times6-1=23$

답. 운반해야 할 짐은 모두 23t입니다.

[설명]

이 문제에서는 물음으로 제기한 량을 x로 놓지 않고 자동차의 대수를 x로 놓고 풀었습니다. 이것이 우에서 푼 문제들과 다른점입니다.

실례 4. 어떤 기계공장의 한 작업반에 77명의 로동자가 있습니다. 매일 매 로동자들은 A종류의 부속품을 5개 혹은 B종류의 부속품을 4개 혹은 C종류의 부속품을 3개 가공할수 있습니다. 그런데 A종류의 부속품 3개, B종류의 부속품 1개, C종류의 부속품 9개를 맞추어야 한대의 완성된 기계가 될수 있습니다. A, B, C종류의 부속품가공에 몇 사람씩 배치하여야 A, B, C종류의 부속품으로 완성된 기계를 만들수 있습니까?

따져보기 A, B, C종류의 부속품을 가공하는 인원수를 모르는것과 함께 부속품의 개수도 알지 못합니다. B종류의 부속품개수를 모르는 수로 선택합시다.

가공된 후 B종류의 부속품이 x개 있다고 하면 A종류의 부속품은 $3x$개, C종류의 부속품은 $9x$개로 됩니다.

A종류의 부속품을 가공하는데 $\frac{3}{5}x$명, B종류의 부속품을 가공하는데 $\frac{1}{4}x$명, C종류의 부속품을 가공하는데 $\frac{9}{3}x$명을 배치하여야 합니다. 문제의 조건으로부터

$$\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}x+\frac{9}{3}x=77$$

이 성립합니다.

풀기 $\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}x+\frac{9}{3}x=77$

$0.6x+0.25x+3x=77$

$3.85x=77$

$x=20$

$x=20$을 넣으면 $0.6x=0.6\times 20=12$(명)

$0.25x=0.25\times 20=5$(명)

$3x=3\times 20=60$(명)

답. A종류의 부속품가공에 12명, B종류의 부속품가공에 5명, C종류의 부속품가공에 60명을 배치해야 합니다.

[설명]

방정식을 세워 응용문제를 풀 때 어떤 방정식을 세우는가 하는것이 중요한것이 아니라 문제를 잘 따져보는데 있습니다. 문제들에서 수량들사이의 관계에 대한 분석이 정확할수록 방정식을 정확히 세울수 있습니다.

련습 14

1. 방목공이 양들을 몰고 방목지에 나가는데 길가던 한 손님이 살찐 양 한마리를 보고 방목공에게 다음과 같이 말하였습니다. 《당신이 몰고가는 양떼에는 약 100마리의 양이 있는것 같습니다.》 그러자 사양공은 다음과 같이 대답하였습니다. 《만일 이 양떼에 1배를 더하고 다시

본래 양떼의 절반을 더하며 또 본래 양떼의 $\frac{1}{4}$을 더합니다. 거기에 또 당신이 본 살찐 양까지 합치면 꼭 100마리가 됩니다.》이 양떼에 몇마리의 양이 있습니까?

2. 어머니가 영옥이를 데리고 백화점에 천을 사려 갔습니다. 천을 2m 사면 1원 80전이 남고 꼭 같은 천을 4m 사면 2원 40전이 모자랍니다. 어머니가 가지고 간 돈은 얼마입니까?

3. 성진이가 자동차길을 따라 한시간동안에 4km씩 걸어서 집에 가고있습니다. 집으로 가는 도중에 9분에 1대씩 뻐스가 뒤에서 와서 그 옆으로 지나갔고 7분에 1대씩 앞에서 마주오면서 뻐스가 그 옆을 지나갔습니다. 뻐스들이 꼭같은 시간간격으로, 끊임없이 오고간다면 뻐스들의 출발시간간격은 얼마입니까?

4. 아침 8시이후에 2대의 자동차가 비료를 싣고 공장에서 농촌으로 갑니다. 두 자동차는 모두 한시간에 60km씩 갑니다. 8시32분이 되였을 때 첫번째 자동차로부터 공장까지의 거리는 두번째 자동차가 간 거리의 3배였고 8시 39분이 되였을 때에는 두번째 자동차가 간 거리의 2배였습니다. 첫번째 자동차가 공장을 떠난 시간은 8시 몇분입니까?(8시이후 공장을 떠난 두 자동차의 출발시간은 같지 않습니다.)

5. 한 아빠트의 8층에 세 집이 살고있는데 1호집은 15W짜리 전등 1개, 2호집은 25W짜리 전등 1개, 3호집은 15W짜리 전등 2개를 씁니다. 이 세 집의 한달 전기사용료로 11원90전을 물었습니다. W수에 따라 사용료를 받았다면 매 집이 얼마씩 내야 합니까?

답 및 풀기방향

1. 36마리

이 양떼에 x마리의 양이 있다고 하면 다음과 같은 방정식이 성립합니다.

$$x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$$

이 방정식을 풀면 $\frac{11}{4}x=99$ $\quad x=36$

답. 이 양떼에 있는 양은 36마리입니다.

2. 6원

어머니가 가지고 간 돈을 x원이라고 하면 1m의 천값은 일정하므로 그 가격을 다음과 같은 두 식으로 표시할 수 있습니다. 하나는 $\frac{x-1.8}{2}$이고 다른 하나는 $\frac{x+2.4}{4}$입니다. 방정식을 세우면

$$\frac{x-1.8}{2}=\frac{x+2.4}{4}$$

이 방정식을 풀면 $x=6$

3. $7\frac{7}{8}$분

자동차가 한시간에 $x$km 간다고 하면 자동차가 같은 시간간격으로, 같은 속도로 달리므로 이웃한 두 자동차사이의 거리는 같습니다. 서로 마주오면서 만났을 때 이웃한 두 자동차사이의 거리는

$$4\times\frac{7}{60}+x\times\frac{7}{60}=(4+x)\times\frac{7}{60}$$

이고 뒤에서 오면서 지나갔을 때 두 자동차사이의 거리는

$$x\times\frac{9}{60}-4\times\frac{9}{60}=\left(x-4\right)\times\frac{6}{60}$$

이므로 다음과 같은 방정식이 성립합니다.

$$(x+4)\times\frac{7}{60}=(x-4)\times\frac{9}{60}$$

이 방정식을 풀면 $x=32$

서로 이웃한 두 자동차사이의 거리는

$$(32+4)\times\frac{7}{60}=4.2\,(\text{km})$$

출발시간간격은 $42\div32=\frac{21}{160}$(시간), $\frac{21}{160}$시간$=7\frac{7}{8}$분

4. 8시 11분

두 자동차는 모두 한시간에 60km씩 달리므로 1분동안에 1km씩 달립니다. 8시 32분부터 8시 39분사이는 7분입니다. 이 시간들에 첫번째 자동차가 있은 두 지점사이의 거리는 $1\times7=7$(km)이며 꼭같이 이 시간에 두번째 자동차가 있은 두 지점사이의 거리도 7km입니다. 그러므로 문제의 조건에 의하여 방정식을 세울수 있습니다.

첫번째 자동차가 8시 x분에 공장을 떠났다고 하면

$$\frac{1}{2}(39-x)-\frac{1}{3}(32-x)=7$$

$$3(39-x)-2(32-x)=42$$

$$117-3x-64+2x=42$$

$$x=11$$

따라서 첫번째 자동차가 공장을 떠난 시간은 8시 11분입니다.

5. 1W의 전기사용료를 x원이라고 하면

$$15x+25x+15\times2x=11.9$$

$$x=0.17$$

그러므로 $0.17\times15=2.55$(원)

$0.17\times25=4.25$(원)

$0.17\times30=5.1$(원)

입니다.

세 집이 물어야 할 전기사용료는 2원 55전, 4원 25전, 5원 10전입니다.

제15절. 항가르기

분모가 서로 다른 두 분수를 더하거나 덜 때 분모를 통분하여 공통분모로 만든 다음 다시 계산한다는것은 이미 학습하였습니다. 실례를 들면 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$이 됩니다. 여기서 두 분수 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$의 분모 3, 4는 서로 이웃한 두 자연수이고 공통분모는 그것들을 곱한 적입니다. 이제 이 식들을 일반적인 경우로 확장합시다.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}$$
$$=\frac{n+1-n}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}$$

즉 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 또는 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

입니다.

이 같기식을 리용하여 분수의 합을 계산하는 문제를 쉽게 풀수 있습니다.

실례 1. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{1{,}986\times1{,}987}+\frac{1}{1{,}987\times1{,}988}+\frac{1}{1{,}988\times1{,}989}+\cdots+\frac{1}{1{,}995\times1{,}996}$$
$$+\frac{1}{1{,}996\times1{,}997}+\frac{1}{1{,}997}$$

따져보기 이 문제를 먼저 통분한 다음 합을 구하려한다면 계산이 복잡해집니다. 그러나 이 문제에서 매 더하는수와 우의 식을 대비하면 $\frac{1}{1{,}997}$을 제외한 나머지 더

하는수의 분모는 서로 이웃한 두 자연수의 적이고 분자는 모두 1입니다. 우의 같기식에 따라 앞과 뒤의 몇개 더하는수도 두 분수의 차의 형식으로 쓸수 있습니다. 이리하여 다음과 같은 몇개의 같기식이 얻어집니다.

$$\frac{1}{1{,}986\times1{,}987}=\frac{1}{1{,}986}-\frac{1}{1{,}987}$$

$$\frac{1}{1{,}987\times1{,}988}=\frac{1}{1{,}987}-\frac{1}{1{,}988}$$

$$\frac{1}{1{,}988\times1{,}989}=\frac{1}{1{,}988}-\frac{1}{1{,}989}$$

$$\frac{1}{1{,}995\times1{,}996}=\frac{1}{1{,}995}-\frac{1}{1{,}996}$$

$$\frac{1}{1{,}996\times1{,}997}=\frac{1}{1{,}996}-\frac{1}{1{,}997}$$

우에서 지적한 몇개 식을 더하면 많은 항들은 서로 더해지고 덜어져서 0으로 됩니다. 이렇게 서로 항이 없어지므로 간단한 식으로 됩니다.

풀기 $\frac{1}{1{,}986\times1{,}987}+\frac{1}{1{,}987\times1{,}988}+\frac{1}{1{,}988\times1{,}989}+\cdots+$

$$\frac{1}{1{,}995\times1{,}996}+\frac{1}{1{,}996\times1{,}997}+\frac{1}{1{,}997}=\frac{1}{1{,}986}-\frac{1}{1{,}987}+\frac{1}{1{,}987}-$$

$$-\frac{1}{1{,}988}+\frac{1}{1{,}988}-\frac{1}{1{,}989}+\cdots+\frac{1}{1{,}995}-\frac{1}{1{,}996}+\frac{1}{1{,}996}-\frac{1}{1{,}997}+$$

$$+\frac{1}{1{,}997}=\frac{1}{1{,}986}$$

이와 같이 분수를 더하거나 덜 때 먼저 분수를 적당히 갈라서 그 중의 일부 분수가 서로 없어지게 함으로써 계산이 간편해지는데 이것을 항가르기법이라고 합니다.

실례 2. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+99+100}$$

따져보기 더하는수는 모두 분자가 1인 분수입니다. 그런데 분모는 몇개 수의 합이고 서로 이웃한 두 자연수의 적이 아닙니다. 그런데 더하는수의 분모는 1부터 시작하여 련이어 있는 몇개 자연수의 합입니다. 공식 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$로부터 매 더하는수의 분모는 서로 이웃한 두 자연수의 적의 절반이라는것을 알수 있습니다. 다음과 같이 변형합니다.

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

n으로 1, 2, 3, …, 100을 취할 때

$$\frac{1}{1}=\frac{2}{1\times2}$$

$$\frac{1}{1+2}=\frac{2}{2\times3}$$

$$\frac{1}{1+2+3}=\frac{2}{3\times4}$$

$$\frac{1}{1+2+3+4}=\frac{2}{4\times5}$$

… …

$$\frac{1}{1+2+\cdots+99+100}=\frac{2}{100\times101}$$

즉 문제에서 더하는수는 모두 분자가 2이고 분모가 련이어 있는 두 자연수를 곱한 적의 형식입니다. 이 형식을 변형하면 실례 1의 형식이 됩니다. 따라서 실례 1의 방법을 쓸수 있습니다.

풀기 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+100}$

$$=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{99\times100}+\frac{2}{100\times101}$$

$$=2\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}+\frac{1}{100\times101}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$$

$$= 2 \times \left(1 - \frac{1}{101}\right)$$

$$= 2 \times \frac{100}{101}$$

$$= \frac{200}{101}$$

$$= 1\frac{99}{101}$$

실례 3. ㅁ, ○은 서로 다른 자연수를 표시합니다. 산수식 $\frac{1}{6} = \frac{1}{ㅁ} + \frac{1}{○}$에서 이 두 부호가 표시하는 수의 합은 얼마입니까?

따져보기 덜기는 더하기의 거꿀산법이라는데 주의를 돌려야 합니다. 다시말하여 더하기산수식을 모두 덜기 산수식으로 고칠수 있습니다. 즉 $\frac{1}{6} = \frac{1}{ㅁ} + \frac{1}{○}$을 $\frac{1}{6} - \frac{1}{ㅁ} = \frac{1}{○}$로 고치면 식 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$을 리용할수 있습니다. 따라서 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$이 나옵니다.

이 문제의 답은 하나뿐입니까? 만일 하나뿐이 아니라면 모든 답을 어떻게 다 찾아내겠습니까? 이 문제에 대답하기 위하여 다음과 같은 일반적인 경우를 봅시다.

n, x, y는 모두 자연수이고 $x \neq y$라고 합시다. $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$일 때 x, y와 n사이에 어떤 관계가 있습니까? 우에서 지적한 더하기를 덜기로 넘기는 방법대로 하면 산수식 $\frac{1}{y} = \frac{x-n}{nx}$이 얻어집니다.

여기서 $x-n$은 반드시 령보다 커야 합니다. $x-n=t>0$ 이라고 하면 $x=n+t$로 됩니다. 웃식에 넣으면

$$\frac{1}{y}=\frac{t}{n(n+t)} \quad \text{즉} \quad y=n+\frac{n^2}{t}$$

이 됩니다.

y, n은 모두 자연수이므로 t는 n^2으로 말끔히 나누어질 수 있습니다. 즉 t는 n^2의 약수이고 t의 개수에 따라 y의 개수도 정해집니다. 이렇게 하여 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 보다 더 일반적인 갈기식을 얻었습니다. 즉 $x=n+t$, $y=n+\frac{n^2}{t}$ 이고 t가 n^2의 약수일 때 반드시

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

즉 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}=\frac{t}{n(n+t)}$ 가 성립합니다.

풀기 $x=n+t$, $y=n+\frac{n^2}{t}$, t가 n^2의 약수일 때 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 이 됩니다. 여기서 $n=6$, $n^2=36$입니다. 36은 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36의 9개 약수를 가집니다.

$t=1$일 때 $x=7, y=42$　　$t=9$일 때 $x=15, y=10$
$t=2$일 때 $x=8, y=24$　　$t=12$일 때 $x=18, y=9$
$t=3$일 때 $x=9, y=18$　　$t=18$일 때 $x=24, y=8$
$t=4$일 때 $x=10, y=15$　　$t=36$일 때 $x=42, y=7$
$t=6$일 때 $x=12, y=12$

그러므로 ㅁ와 ㅇ가 대신하는 두 수의 합은 49, 32, 27, 25입니다.

실례 4. A, B, C, D, E, F는 서로 다른 자연수를 표시합니다. A, B, C, D, E, F가 어떤 값을 가질 때 다음 갈기식이 성립합니까?

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\frac{1}{F}=\frac{1}{2}$$

따져보기 같기식 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 을 반복하여 쓰면 결과가 얻어집니다.

풀기 1: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 이므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,

$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$, $\frac{1}{42}-\frac{1}{43}=\frac{1}{1{,}806}$, $\frac{1}{1{,}806}-\frac{1}{1{,}807}=\frac{1}{3{,}263{,}442}$,

$\frac{1}{3{,}263{,}442}-\frac{1}{3{,}263{,}443}=\frac{1}{10{,}650{,}056{,}950{,}806}$ 이 됩니다.

A=3, B=7, C=43, D=1,807, E=3,263,443, F= 10,650,056,950,806일 때 같기식이 성립합니다. 즉

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1{,}807}+\frac{1}{3{,}263{,}443}+\frac{1}{10{,}650{,}056{,}950{,}806}=\frac{1}{2}$$

이 방법은 계산량이 많으므로 다른 편리한 방법을 찾아봅시다.

풀기 2: $\frac{1}{2}$ 의 분자와 분모에 2의 약수 1, 2의 합을 곱하면 $\frac{1}{2}=\frac{1+2}{2\times(1+2)}$ 가 됩니다. $\frac{1+2}{2\times(1+2)}$ 를 두 분수를 서로 더한 형태로 바꾸면 $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$ 이 됩니다. 이와 같은 방법으로 $\frac{1}{3}$ 과 $\frac{1}{6}$ 을 두 분수를 더한 형태로 바꾸면 다음과 같이 됩니다.

$$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{3\times(1+3)}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1+2}{6\times(1+2)}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}$$

다시 $\frac{1}{4}$과 $\frac{1}{9}$을 두 분수를 더한 형태로 바꾸면

$$\frac{1}{4}=\frac{1+4}{4\times(1+4)}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1+3}{9\times(1+3)}=\frac{1}{36}+\frac{1}{12}$$

$\frac{1}{12}$이 2개 있으므로 문제의 조건을 만족시키지 못합니다. $\frac{1}{18}$을 두 분수를 더한 형태로 바꾸면

$$\frac{1}{18}=\frac{1+2}{18\times(1+2)}=\frac{1}{54}+\frac{1}{27}$$

이 됩니다. 그러므로 A=5, B=9, C=12, D=20, E=27, F=54일 때 갈기식이 성립합니다. 즉

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}=\frac{1}{2}$$

풀기 2는 풀기 1보다 간단합니다. 풀기 2를 일반화하면 다음과 같이 됩니다.

a_1, a_2이 A의 서로 다른 두 약수일 때 $\frac{1}{\mathrm{A}}$의 분자와 분모를 동시에 (a_1+a_2)배만큼 확장합니다. 즉 $\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{a_1+a_2}{\mathrm{A}\times(a_1+a_2)}$이 되게 합니다. 다음 분수 $\frac{a_1+a_2}{\mathrm{A}\times(a_1+a_2)}$을 2개의 분수를 더한 형태로 고칩니다. 즉

$$\frac{1}{\mathrm{A}}=\frac{a_1+a_2}{\mathrm{A}\times(a_1+a_2)}=\frac{1}{\frac{\mathrm{A}}{a_1}\times(a_1+a_2)}+\frac{1}{\frac{\mathrm{A}}{a_2}\times(a_1+a_2)}$$

이 되게 합니다.

a_1, a_2은 A의 약수이므로 다시 약분하면 분모는 서로 다르고 분자는 모두 1인 두 분수의 합으로 표시됩니다. 즉

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\frac{A}{a_1}\times(a_1+a_2)}+\frac{1}{\frac{A}{a_2}\times(a_1+a_2)}$$

이 됩니다.

A가 서로 다른 몇개의 약수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$을 가질 때

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\frac{A}{a_1}\times(a_1+a_2+\cdots+a_n)}+\frac{1}{\frac{A}{a_2}\times(a_1+a_2+\cdots+a_n)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\frac{A}{a_n}\times(a_1+a_2+\cdots+a_n)}$$

이 됩니다.

련습 15

1. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}$$

2. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\frac{1}{36}+$$

$$+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{66}+\frac{1}{78}+\frac{1}{91}+\frac{1}{105}+\frac{1}{120}$$

3. x, y는 서로 다른 자연수입니다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}$일 때 $x+y$를 구하십시오.

4. A, B, C, D, E, F가 서로 다른 어떤 자연수를 가질 때 다음 같기식이 성립하겠습니까?

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\frac{1}{F}=\frac{1}{20}$$

5. 다음 식을 계산하십시오.

$$1+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{12}+4\frac{1}{20}+5\frac{1}{30}+6\frac{1}{42}+7\frac{1}{56}+8\frac{1}{72}+9\frac{1}{90}$$

답 및 풀기방향

1. $\frac{99}{100}$ 2. $\frac{7}{8}$ 3. 75, 81, 96, 121, 147, 200, 361
4. A=42, B=84, C=168, D=210, E=420, F=840 이밖에 다른 풀이가 있을수 있습니다.
5. $45\frac{2}{5}$

제16절. 분수의 합구하기기교

앞절에서 갈기식

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

을 리용하여 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{9{,}900}$ 과 같은 문제를 쉽게 계산할수 있다는것을 학습하였습니다. 이 갈기식을 확장하여 다음과 같은 다른 한개의 갈기식을 얻을수 있습니다.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}=\frac{t}{n(n+t)}$$

이 갈기식을 리용하여 분수의 계산문제를 풀수 있습니다.

실례 1. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{1{,}995\times 1{,}997}$$

따져보기 먼저 항가르기방법을 써서 풀어봅시다.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+t}=\frac{t}{n(n+t)}$$ 이므로

n=1, t=2일 때 $\frac{2}{1\times 3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$

n=3, t=2일 때 $\frac{2}{3\times 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

n=5, t=2일 때 $\frac{2}{5\times 7}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

n=1,995, t=2일 때 $\frac{2}{1{,}995\times 1{,}997}=\frac{1}{1{,}995}-\frac{1}{1{,}997}$

이 998개의 같기식왼변에 있는 분수에서 그 분모는 각각 앞절의 실례 1에서 매 항의 분모와 같고 분자만 다릅니다. 그런데 앞절의 실례 1에서 매 항은 이 998개의 같기식의 왼변의 분수와 같습니다. 실례를 들면

$$\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1\times 3},\quad \frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3\times 5},\quad \cdots,$$

$$\frac{1}{1{,}995\times 1{,}997}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1{,}995\times 1{,}997}$$

이와 같이 항가르기방법을 써서 그 결과를 비교적 빨리 구할수 있습니다.

풀기 $\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1\times 3}$

$$\frac{1}{3\times 5}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3\times 5}$$

$$\frac{1}{1{,}995\times 1{,}997}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1{,}995\times 1{,}997}$$

이므로

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{1{,}995\times 1{,}997}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1\times 3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{2}\times\frac{2}{1{,}995\times 1{,}997}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\cdots+\frac{2}{1{,}995\times1{,}997}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1{,}995}-\frac{1}{1{,}997}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{1{,}997}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1{,}996}{1{,}997}$$

$$=\frac{998}{1{,}997}$$

실례 2. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$$

따져보기 실례 1과 비교해보면 매 항의 분모는 모두 련이어있는 3개 자연수의 적입니다. 앞으로부터 몇개 항을 갈라보고 규칙을 찾습니다.

$$\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}=\frac{3-1}{1\times2\times3}=\frac{2}{1\times2\times3}$$

이므로 $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)$

이 됩니다. 꼭같이

$$\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)$$

$$\frac{1}{3\times4\times5}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)$$

...

일반적으로

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

이므로

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

가 됩니다. 여기서 n은 임의의 자연수입니다.

풀기 n이 임의의 자연수일 때 갈기식

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

이 성립하므로

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4{,}950-1}{9{,}900}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4{,}949}{9{,}900}$$

$$=\frac{4{,}949}{19{,}800}$$

실례 3. 다음 식을 계산하십시오.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+3}+\frac{1}{2+3+4}+\frac{1}{2+3+4+5}+\cdots$$

$$+\frac{1}{2+3+4+\cdots+199+200}$$

따져보기 실례 2에서와 마찬가지로 몇개의 특수한 실례에 기초하여 규칙을 찾습니다.

$$\frac{1}{2+3}=\frac{2}{(2+3)\times 2}=\frac{2}{2\times 5}$$

$$\frac{1}{2+3+4}=\frac{2}{(2+4)\times 3}=\frac{2}{3\times 6}$$

$$\frac{1}{2+3+4+5}=\frac{2}{(2+5)\times 4}=\frac{2}{4\times 7}$$

우에서 지적한 같기식의 분자는 모두 2이고 분모는 두 자연수의 적입니다. 이 두 자연수중에서 작은수는 같기식의 왼변에 있는 분모의 더하는 수의 개수와 같고 다른 1개 자연수는 이 자연수보다 3이 더 큽니다. 이와 같은 일반적인 경우로 확장하면 다음과 같은 같기식을 얻을수 있습니다.

$$\frac{1}{2+3+4+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times(n+2)\times(n+1)}$$

$$=\frac{2}{(n-1)(n+2)}=2\times\frac{1}{(n-1)(n+2)}$$

이고 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}$

$$=\frac{(n+2)-(n-1)}{(n-1)(n+2)}=\frac{3}{(n-1)(n+2)}$$

즉

$$\frac{1}{(n-1)(n+2)}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이 같기식을 련이어 쓰면 결과가 빨리 얻어집니다.

풀기 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2+3}+\frac{1}{2+3+4}+\cdots+\frac{1}{2+3+\cdots+199+200}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\times 5}+\frac{2}{3\times 6}+\cdots+\frac{2}{199\times 202}$$

$$=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{3\times 6}+\cdots+\frac{1}{199\times 202}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2\times 5}+\frac{3}{3\times 6}+\cdots+\frac{1}{199\times 202}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{199}-\frac{1}{202}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{199}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{202}\right)\right]$$

첫번째 괄호안의 모든 분수의 분자는 1이고 분모는 차례로 2, 3, 4, …, 199이므로 모두 198개의 수입니다. 두번째 괄호안의 모든 분수의 분자도 1이고 분모는 차례로 5, 6, 7, …, 202이므로 모두 198개의 분수가 있습니다. 이렇게 분모가 각각 5, 6, 7, …, 199인 분수는 더하기 덜기가 함께 포함되여있으므로 서로 없어집니다. 이리하여 첫번째 괄호안에는 3개의 분수 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$만 있게 되며 두번째 괄호안에는 3개 분수 $\frac{1}{200}$, $\frac{1}{201}$, $\frac{1}{202}$만 있게 됩니다. 그러므로

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{199}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{200}+\frac{1}{201}+\frac{1}{202}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{99}{200}+\frac{66}{201}+\frac{99}{404}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{33}{100}+\frac{44}{201}+\frac{33}{202}$$
$$=1\frac{430,933}{2,030,100}$$

실례 4. 다음의 모든 분수들의 합을 구하십시오.

$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; … ; $\frac{1}{1,997}$, $\frac{2}{1,997}$, …, $\frac{1,996}{1,997}$, $\frac{1,997}{1,997}$, $\frac{1,996}{1,997}$, …, $\frac{2}{1,997}$, $\frac{1}{1,997}$

따져보기 이 문제는 분모가 다른 분수의 합을 구하는 문제입니다. 이 분수의 공통분모를 구하자면 먼저 1, 2, …, 1,997의 1,997개수의 최소공통배수를 구해야 하는데 매우 복잡해집니다. 그러므로 다른 방법을 생각해야 합니다. 먼저 분모가 각각 1, 2, 3, 4인 모든 분수의 합이 얼마인가를 계산한 다음 다시 생각해봅니다.

$$\frac{1}{1}=1,\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=2$$
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=3$$
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=4$$

이 4개의 결과는 분모가 각각 1, 2, 3, 4인 모든 분수의 합은 각각 1, 2, 3, 4라는것을 말해줍니다. 만일 이 결론이 일반성을 가진다면 우에서 지적한 모든 분수의 합을 구하는 문제가 매우 빨리 해결됩니다. 일반적인 경우를 봅시다.

분수의 분모가 어떤 자연수 k라고 가정하면

분모가 k인 모든 분수는 $\frac{1}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{3}{k}$, …, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k}$,

$\frac{k-1}{k}$, …, $\frac{3}{k}$, $\frac{2}{k}$, $\frac{1}{k}$이 됩니다. 그것들의 합은

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\cdots+\frac{k-1}{k}+\frac{k}{k}+\frac{k-1}{k}+\cdots+\frac{3}{k}+\frac{2}{k}+\frac{1}{k}$$
$$=\frac{1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1}{k}$$
$$=\frac{(1+2+\cdots+k-1)\times 2+k}{k}$$
$$=\frac{(k-1+1)(k-1)\div 2\times 2+k}{k}$$
$$=\frac{k(k-1)+k}{k}$$
$$=k-1+1=k$$

이 결론을 리용하여 다음과 같은 풀이를 얻을수 있습니다.

풀기 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\cdots$

$$+\frac{1}{1{,}997}+\frac{2}{1{,}997}+\cdots+\frac{1{,}997}{1{,}997}+\cdots+\frac{2}{1{,}997}+\frac{1}{1{,}997}$$
$$=1+2+3+\cdots+1{,}997$$
$$=(1+1{,}997)\times 1{,}997\div 2$$
$$=1{,}997\times 999$$
$$=1{,}995{,}003$$

실례 5. 자연수 m과 n사이에 있는 모든 분모가 p인 가장 간단한 분수의 합은 얼마입니까?(여기서 m<n이고 p는 씨수이면서 홀수입니다.)

따져보기 먼저 문제에서 요구하는 가장 간단한 분수를 모두 씁니다. P는 홀수이면서 씨수이므로 p와 서로 소이고 p보다 작은 자연수는 1, 2, 3, …, p−1이며 모두 (p−1)개입니다. 다시말하여 서로 린접인 두 수사이에 있는 분모가 p인 가장 간단한 분수는 모두 (p−1)개입니다. 그러므로 문제의 조건을 만족시키는 모든 분수는

$$m+\frac{1}{p},\ m+\frac{2}{p},\ \cdots,\ m+\frac{p-1}{p};$$

$$(m+1)+\frac{1}{p},\ (m+1)+\frac{2}{p},\ \cdots,\ (m+1)+\frac{p-1}{p};$$

$$(n-1)+\frac{1}{p},\ (n-1)+\frac{2}{p},\ \cdots,\ (n-1)+\frac{p-1}{p}$$

이 분수의 합을 구하면

$$\left[\left(m+\frac{1}{p}\right)+\left(m+\frac{2}{p}\right)+\cdots+\left(m+\frac{p-1}{p}\right)\right]+$$

$$+\left[((m+1)+\frac{1}{p}+(m+1)+\frac{2}{p}+\cdots+(m+1)+\frac{p-1}{p}\right]+\cdots$$

$$+\left[(n-1)+\frac{1}{p}+(n-1)+\frac{2}{p}+\cdots+(n-1)+\frac{p-1}{p}\right]$$

$$=m\times(p-1)+\frac{1+2+\cdots+p-1}{p}+(m+1)\times(p-1)+$$

$$+\frac{1+2+\cdots+p-1}{p}+\cdots+(n-1)\times(p-1)+\frac{1+2+\cdots+p-1}{p}$$

$$=(p-1)\times(m+m+1+\cdots+n-1)+\frac{p(p-1)\div 2}{p}+$$

$$+\frac{p-(p-1)\div 2}{p}+\frac{p(p-1)\div 2}{p}+\cdots+\frac{p(p-1)\div 2}{p}$$

이 됩니다.

m과 (n－1)사이의 자연수는 모두 (n－m)개 [n－m=(n－1)－m+1]이므로 우의 결과중에서

(n－m)개의 $\frac{p(p-1)\div 2}{p}$가 있습니다.

풀기 $\left[\left(m+\frac{1}{p}\right)+\left(m+\frac{2}{p}\right)+\cdots+\left(m+\frac{p-1}{p}\right)\right]+$

$$+\left[\left(m+1+\frac{1}{p}\right)+\left(m+1+\frac{2}{p}\right)+\cdots+\left(m+1+\frac{p-1}{p}\right)\right]+\cdots$$

$$\cdots+\left[\left(n-1+\frac{1}{p}\right)+\left(n-1+\frac{2}{p}\right)+\cdots+\left(n-1+\frac{p-1}{p}\right)\right]$$

$$=(p-1)\times(m+m+1+\cdots+n-1)+\frac{p(p-1)\div 2}{p}+\frac{p(p-1)\div 2}{p}$$

$$=(p-1)\times\frac{1}{2}\times(m+n-1)\times(n-m)+\frac{1}{2}\times\frac{p(p-1)}{p}\times(n-m)$$

$$=\frac{1}{2}\times(p-1)\times(n-m)\times(m+n-1+1)$$

$$=\frac{1}{2}\times(p-1)\times(n-m)\times(n+m)$$

이상의 매 실례를 푸는 과정을 통하여 알수 있는바와 같이 관찰을 통하여 규칙을 찾은 다음 그 규칙을 리용하여 문제를 푸는것은 흔히 쓰고있는 풀이법의 한가지입니다.

련습 16

1. 다음의 합을 구하십시오.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3+4}+\frac{1}{3+4+5}+\frac{1}{3+4+5+6}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{3+4+\cdots+19+20}$$

2. 다음의 합을 구하십시오.

$$1\frac{1}{10}+3\frac{1}{40}+5\frac{1}{88}+7\frac{1}{154}+9\frac{1}{238}+11\frac{1}{340}$$

3. 다음의 합을 구하십시오.

$$\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{17\times 18\times 19\times 20}$$

4. 3부터 9사이에 있는 분모가 2인 모든 가장 간단한

분수의 합을 구하십시오.

5. 5부터 13사이에 있는 분모가 9인 모든 가장 간단한 분수의 합을 구하십시오.

답 및 풀기방향

1. $\frac{687,836}{841,225}$ 2. $36\frac{3}{20}$ 3. $\frac{1,139}{20,520}$ 4. 36 5. 432

제17절. 분수의 비교

두 분수의 크기를 비교할 때 다음과 같은 세가지 방법을 씁니다.

첫째로, 두 분수의 분모가 같으면 분자가 큰 분수가 더 큽니다. 둘째로, 두 분수의 분자가 같으면 분모가 큰 분수가 더 작습니다. 셋째로, 가분수는 참분수보다 큽니다. 이제 이 방법을 리용하여 분수를 비교하는 문제를 고찰합시다.

실례 1. 분수 $\frac{5}{17}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{15}{46}$, $\frac{10}{33}$, $\frac{30}{37}$ 중에서 어느 분수가 가장 큽니까?

따져보기 이 5개 분수의 분모는 모두 다릅니다.

이 분모를 같은 공통분모로 만들려면 계산이 복잡합니다. 그것들의 분자를 다시 봅시다. 5개의 분자가 모두 다르기는 하지만 그것들을 같은 수로 만드는것은 분모보다 간단합니다. 왜냐하면 30은 5, 6, 15, 10, 30의 공통배수이기때문입니다. 분수의 기본성질을 리용하여 매 분수를 분자가 모두 30인 분수로 만들수 있습니다.

$$\frac{5}{17}=\frac{5\times 6}{17\times 6}=\frac{30}{102},\ \frac{6}{19}=\frac{6\times 5}{19\times 5}=\frac{30}{95}$$

$$\frac{15}{46}=\frac{15\times 2}{46\times 2}=\frac{30}{92},\quad \frac{10}{33}=\frac{10\times 3}{33\times 3}=\frac{30}{99},\quad \frac{30}{37}$$

이 5개의 분수의 분자는 모두 30입니다. 그러므로 분모의 크기에 따라 분수값이 평가됩니다. 분모를 크기의 순서로 쓰면 37, 92, 95, 99, 102입니다. 그러므로 분수의 크기순서는

$$\frac{30}{102}<\frac{30}{99}<\frac{30}{95}<\frac{30}{92}<\frac{30}{37} \quad 즉 \quad \frac{5}{17}<\frac{10}{33}<\frac{6}{19}<\frac{15}{46}<\frac{30}{37}$$

풀기 $\frac{5}{17}<\frac{10}{33}<\frac{6}{19}<\frac{15}{46}<\frac{30}{37}$

이므로 이중에서 가장 큰 분수는 $\frac{30}{37}$ 입니다.

실례 2. 분수 $\frac{444,443}{444,445}$와 $\frac{555,554}{555,556}$의 크기를 비교하십시오.

따져보기 이 분수의 분자와 분모는 모두 다릅니다. 그리고 모두 참분수입니다. 그러므로 앞에서 지적한 3가지 방법을 직접 쓰기는 어렵습니다. 이제 다른 방법으로 비교할수 없겠는가를 생각해봅시다.

$$1-\frac{444,443}{444,445}=\frac{2}{444,445}$$

$$1-\frac{555,554}{555,556}=\frac{2}{555,556}$$

이고 분수 $\frac{2}{444,445}$와 $\frac{2}{555,556}$의 분자는 모두 2이며 분모가 555,556>444,445이므로

$$\frac{2}{444,445}>\frac{2}{555,556}$$

입니다. 덜릴수는 일정하고 더는 수가 클수록 차는 더 작아지므로

$$\frac{444,443}{444,445} < \frac{555,554}{555,556}$$

이 됩니다.

풀기 $\frac{444,443}{444,445} < \frac{555,554}{555,556}$

이 문제를 다음과 같이 생각할수도 있습니다. 먼저 두 분수를 몇배로 확장한 다음 적의 크기에 의하여 본래 분수의 크기를 판정합니다.

$$\frac{444,443}{444,445} \times 444,445 = 444,443$$

$$\begin{aligned}\frac{555,554}{555,556} \times 444,445 &= \frac{555,554 \times 444,445}{555,556} \\ &= \frac{(555,556 - 2) \times 444,445}{555,556} \\ &= 444,445 - \frac{2 \times 444,445}{555,556} \\ &= 444,445 - \frac{444,445}{277,778} \\ &= 444,445 - 1\frac{166,667}{277,778} \\ &= 444,444\frac{111,111}{277,778}\end{aligned}$$

이고 또

$$444,444\frac{111,111}{277,778} > 444,443$$

이므로

$$\frac{444,443}{444,445} < \frac{555,554}{555,556}$$

가 됩니다.

이 문제를 또 참분수의 정의에 의하여 다음과 같이 풀

수도 있습니다.

$$\frac{444,443}{444,445} \div \frac{555,554}{555,556} = \frac{444,443 \times 555,556}{444,445 \times 555,554}$$

이고

$$444,443 \times 555,556 = 444,443 \times (555,554+2)$$
$$= 444,443 \times 555,554 + 444,443 \times 2$$
$$444,445 \times 555,554 = (444,443+2) \times 555,554$$
$$= 444,443 \times 555,554 + 555,554 \times 2$$

입니다. 그런데 $444,443 \times 2 < 555,554 \times 2$이므로

$$444,443 \times 555,556 < 444,445 \times 555,554$$

즉 $\frac{444,443}{444,445} \div \frac{555,554}{555,556}$의 상은 한개의 참분수입니다. 그러므로

$$\frac{444,443}{444,445} < \frac{555,554}{555,556}$$

자세히 관찰해보면 $444,443 \times 555,556$과 $444,445 \times 555,554$는 모두 한 분수의 분모와 다른 한개 분수의 적이며 만일 어느 분자의 적이 크면 이 분자가 있는 분수도 더 크다는것을 알수 있습니다.

일반적으로 두 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$에서 $ad > bc$일 때 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$입니다. 왜냐하면

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}$$

이기때문입니다.

$ad > bc$일 때 $ad - bc > 0$이고 $bd > 0$이므로 $\frac{ad - bc}{bd} > 0$입니다. 그러므로 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$입니다.

실례 3. 다음 식들에서 두 분수의 크기를 비교하십시오.

(1) $\dfrac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901}$ 과 $\dfrac{1{,}234{,}567{,}890-1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901-1{,}990}$

(2) $\dfrac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901}$ 과 $\dfrac{1{,}234{,}567{,}890+1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901+1{,}990}$

(3) $\dfrac{1{,}011{,}121{,}314{,}151{,}617{,}181{,}920}{2{,}122{,}232{,}425{,}262{,}728{,}293{,}031}$ 과

$$\frac{1{,}011{,}121{,}314{,}151{,}617{,}181{,}920+\overbrace{11\cdots11}^{222\text{개}}}{2{,}122{,}232{,}425{,}262{,}728{,}293{,}031+\underbrace{11\cdots11}_{222\text{개}}}$$

(4) $\dfrac{7{,}778{,}798{,}081{,}828{,}384{,}858{,}687}{6{,}768{,}697{,}071{,}727{,}374{,}757{,}677}$ 과

$$\frac{7{,}778{,}798{,}081{,}828{,}384{,}858{,}687-55{,}555}{6{,}768{,}697{,}071{,}727{,}374{,}757{,}677-55{,}555}$$

따져보기 먼저 (1)식을 봅시다. 실례 2에서 쓴 방법을 생각합니다.

$1{,}234{,}567{,}890-1{,}990=1{,}234{,}565{,}900$

$2{,}345{,}678{,}901-1{,}990=2{,}345{,}676{,}911$이므로

$$\frac{1{,}234{,}567{,}890-1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901-1{,}990}=\frac{1{,}234{,}565{,}900}{2{,}345{,}676{,}911}$$

입니다. 그리고

$$1-\frac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901}=\frac{1{,}111{,}111{,}011}{2{,}345{,}678{,}901}$$

$$1-\frac{1{,}234{,}565{,}900}{2{,}345{,}676{,}911}=\frac{1{,}111{,}111{,}011}{2{,}345{,}676{,}911}$$

이 됩니다. 이 두 분수의 분자는 같고 분모가 다르며 $2{,}345{,}678{,}901>2{,}345{,}676{,}911$

이므로

$$\frac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901}>\frac{1{,}234{,}567{,}890-1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901-1{,}990}$$

이 방법은 어떤 두 분수의 크기를 판단할수는 있으나

(3)은 계산하기 복잡합니다. 보다좋은 방법이 없겠는가를 생각합시다. (1)식을 보면 그것은 $\frac{a}{b}$와 $\frac{a-k}{b-k}$인 일반적인 경우의 특수한 실례입니다. 그러므로 이제 일반적인 경우를 생각합시다. 즉 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{a-k}{b-k}$의 크기를 비교합시다(여기서 k는 a, b보다 작은 수입니다).

$$a \times (b-k) = a \times b - a \times k$$
$$b \times (a-k) = a \times b - b \times k$$

이 두 같기식의 같기기호뒤에 있는 덜릴수는 같고 모두 $a \times b$이므로 크기는 더는 수의 크기에 따라 결정됩니다. 두 더는수는 각각 $a \times k$와 $b \times k$이고 $a > b$일 때 $a \times b - b \times k > a \times b - a \times k$이므로 $\frac{a}{b} < \frac{a-k}{b-k}$입니다.

$a < b$일 때 $a \times b - b \times k < a \times b - a \times k$이므로 $\frac{a}{b} > \frac{a-k}{b-k}$입니다.

이것은 다음과 같은 사실을 보여줍니다. 만일 어떤 분수가 참분수이면 이 분수의 분자와 분모에서 분자보다 작은 어떤 수를 동시에 덜었을 때 얻어지는 새 분수는 본래의 참분수보다 작습니다. 우에서 본 (1)에 대한 결론은 이것을 잘 설명해줍니다. 거꾸로 만일 어떤 분수가 가분수이면 이 분수의 분자와 분모에서 동시에 분모보다 작은 어떤 수를 덜었을 때 얻어지는 분수는 본래의 분수보다 큽니다. 글자로 표시하면 다음과 같습니다.

$$a > b \text{일 때} \quad \frac{a}{b} < \frac{a-k}{b-k} (k < b)$$
$$a < b \text{일 때} \quad \frac{a}{b} > \frac{a-k}{b-k} (k < a)$$

꼭 같은 방법으로 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{a+k}{b+k}$의 크기를 따져볼수 있습니다.

$$a \times (b + k) = a \times b + a \times k$$
$$b \times (a + k) = a \times b + b \times k$$
에서 두 식의 같기부호뒤에 있는 2개의 더하는수에서 1개는 같고 모두 $a \times b$입니다. 이렇게 합의 크기는 다른 1개 더하는수의 크기에 의하여 결정됩니다.

$a > b$일 때 $a \times k > b \times k$이고 $a \times b + a \times k > a \times b + b \times k$이므로 이때 $\frac{a}{b} > \frac{a+k}{b+k}$가 됩니다.

$a < b$일 때 $a \times k < b \times k$이고 $a \times b + a \times k < a \times b + b \times k$이므로 이때 $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$가 됩니다.

이렇게 이와 같은 분수의 크기를 비교하는 문제는 분수가 참분수인가 가분수인가를 판단하는데로 넘어갑니다. 이제 이상의 결론에 기초하여 (1), (2), (3), (4)에서 두 분수의 크기를 비교해봅시다.

풀기 ⑴ 1,234,567,890<2,345,678,901이므로

$$\frac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901} > \frac{1{,}234{,}567{,}890 - 1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901 - 1{,}990}$$

⑵ 1,234,567,890<2,345,678,901이므로

$$\frac{1{,}234{,}567{,}890}{2{,}345{,}678{,}901} < \frac{1{,}234{,}567{,}890 + 1{,}990}{2{,}345{,}678{,}901 + 1{,}990}$$

⑶ 1,011,121,314,151,617,181,920<2,122,232,425,262,728,293,031이므로

$$\frac{1{,}011{,}121{,}314{,}151{,}617{,}181{,}920}{2{,}122{,}232{,}425{,}262{,}728{,}293{,}031}$$

$$= \frac{1{,}011{,}121{,}314{,}151{,}617{,}181{,}920 + \overbrace{11\cdots11}^{222\text{개}}}{2{,}122{,}232{,}425{,}262{,}728{,}293{,}031 + \underbrace{11\cdots11}_{222\text{개}}}$$

⑷ 7,778,798,081,828,384,858,687>67,686,970,717,273,747,576이므로

$$\frac{7{,}778{,}798{,}081{,}828{,}384{,}858{,}687-55{,}555}{6{,}768{,}697{,}071{,}727{,}374{,}757{,}677-55{,}555}$$
$$>\frac{7{,}778{,}798{,}081{,}828{,}384{,}858{,}687}{6{,}768{,}697{,}071{,}727{,}374{,}757{,}677}$$

실례 3에서 말해주는바와 같이 일반적인 경우의 결론을 얻은 다음 결론을 써서 개별적인 문제를 푸는것이 매우 효과적이라는것을 알수 있습니다.

련습 17

1. 다음의 분수를 크기순서로 쓰십시오.

$\frac{13}{12}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$

2. 두 분수의 크기를 비교하십시오.

⑴ $\frac{73^{1,997}}{73^{1,996}}$ 과 $\frac{73^{1,997}-1{,}997}{73^{1,996}-1{,}997}$

⑵ $\frac{1{,}996^{1,997}}{1{,}997^{1,996}}$ 과 $\frac{1{,}996^{1,997}+1{,}997}{1{,}997^{1,996}+1{,}997}$

3. $\frac{77{,}777{,}775}{77{,}777{,}779}$ 와 $\frac{888{,}888{,}883}{888{,}888{,}887}$ 의 크기를 비교하십시오.

4. 분수 $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{100}{201}$, $\frac{150}{301}$ 에서 어느것이 가장 큰 분수입니까?

5. 다음의 □안에 어떤 자연수를 썼을 때 안같기식이 성립합니까?

$$\frac{5}{9}<\frac{9}{\square}<1$$

6. $\frac{1{,}990^{1,991}}{1{,}991^{1,990}}$ 과 $\frac{1{,}990^{1,991}+1{,}991}{1{,}991^{1,990}+1{,}991}$ 의 크기를 비교하십시오.

답 및 풀기방향

1. $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{13}{12}<\frac{9}{8}<\frac{7}{6}<\frac{5}{4}<\frac{14}{9}$

왜냐하면 $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$, $\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$, $\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$, $\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$, $\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$이므로 $\frac{1}{12}<\frac{1}{8}<\frac{1}{6}<\frac{1}{4}<\frac{5}{9}$이기때문입니다.

따라서 $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{13}{12}<\frac{9}{8}<\frac{7}{6}<\frac{5}{4}<\frac{14}{9}$가 됩니다.

2. (1) $\frac{73^{1,997}}{73^{1,996}}<\frac{73^{1,997}-1,997}{73^{1,996}-1,997}$

(2) $\frac{1,996^{1,997}}{1,997^{1,996}}>\frac{1,996^{1,997}+1,997}{1,997^{1,996}+1,997}$

3. $\frac{777,777,775}{777,777,779}<\frac{888,888,883}{888,888,887}$

4. $\frac{151}{301}$

5. □안에 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16의 7개수중에서 임의의 한수를 써넣었을 때 안같기식이 성립합니다.

$\frac{9}{\square}<1$이므로 □에 9보다 큰 임의의 자연수를 써넣어야 합니다. 이밖에 또 $\frac{5}{9}<\frac{9}{\square}$이므로 $5\times\square<9\times9=81$이고 $\square<\frac{81}{5}=16.2$ 입니다.

그러므로 □안에 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16가운데서 임의의 한수를 써넣으면 됩니다.

6. $\frac{1,990^{1,991}}{1,991^{1,990}}>\frac{1,990^{1,991}+1,991}{1,991^{1,990}+1,991}$

$$\frac{1,990^{1,991}}{1,991^{1,990}}=\left\{\frac{1,990}{1,991}\right\}^{1,990}\times 1,990>(0.999)^{1,990}\times 1,990$$

$$=0.998001^{995}\times 1,990>0.998^{995}\times 1,990$$
$$=0.998^{994}\times 0.998\times 1,990$$
$$=0.998^{2\times 497}\times 1,986.02>0.996004^{497}\times 1,986>$$
$$>0.996^{2\times 248}\times 0.996\times 1,986$$
$$=0.992016^{248}\times 1978.056>0.992^{248}\times 1,978$$
$$=0.984064^{124}\times 1,978>0.984^{124}\times 1,978$$
$$=0.968256^{62}\times 1,978>0.968^{2\times 31}\times 1,978$$
$$=0.972196^{31}\times 1,978>0.972^{2\times 15}\times 1922.616>$$
$$>0.944784^{15}\times 1.922>0.944^{2\times 7}\times 1814.368>$$
$$>0.891136^{7}\times 1,814>0.891^{2\times 3}\times 1,614>0.89^{2\times 3}\times 1,614$$
$$=0.7921^{3}\times 1,614>0.7^{3}\times 1,614$$
$$=0.343\times 1,614>0.3\times 1,000>1$$

그러므로 $\frac{1,990^{1,991}}{1,991^{1,990}}>\frac{1,990^{1,991}+1,991}{1,991^{1,990}+1,991}$

제18절. 분수를 소수로 고치기

순환소수를 배운 다음 어떤 학생들은 0.(9)와 1이 어느것이 더 큰가에 대하여 의문을 가질수 있습니다. 이 문제를 해명하기 위하여서는 분수를 소수로 넘기는 방법을 잘 알아야 합니다.

유한소수는 열올림분수의 다른 한가지 표시방법 실례를 들면 $0.1=\frac{1}{10}$, $1.35=\frac{135}{100}$, …이므로 분수는 열올림분수로 고칠수 있으면 유한소수로 고칠수 있습니다. 어떤 분수를 열올림분수로 고칠수 있습니까? 분모를 씨인수분해한 다음 2,5와 같은 씨수를 포함한 가장 간단한 분수 즉 어떤 가장 간

단한 분수식이 분모를 2와 5로 나누는것밖에 기타 씨수를 포함하지 않는 분수는 유한소수로 고쳐질수 있으며 유한소수중에서 소수부분의 자리수는 분모의 씨수 2, 5중에서 최대인 수와 같습니다. 그렇다면 어떤 분수가 순환소수, 혼순환소수로 넘겨질수 있습니까? 그것의 순환되지 않는 부분의 자리수와 순환마디의 최소자리수와 분모사이에는 어떤 관계가 있습니까? 이제 아래와 같은 문제를 생각해봅시다.

실례 1. 분수 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{33}$, $\frac{8}{27}$을 소수로 고치십시오.

따져보기 매 분수의 분자를 분모로 나누면 매 분수가 소수로 고쳐질수 있습니다.

풀기 $\frac{2}{3} = 2 \div 3 = 0.666\cdots$

6은 반복하여 나타나므로 $\frac{2}{3} = 0.(6)$ 입니다.

$$\frac{3}{11} = 3 \div 11 = 0.272727\cdots$$

에서 27이 반복되여 나타나므로 $\frac{3}{11} = 0.(27)$ 입니다.

$$\frac{5}{7} = 5 \div 7 = 0.714285714285\cdots$$

에서 714285가 반복되여 나타나므로 $\frac{5}{7} = 0.(714285)$ 입니다.

$$\frac{4}{33} = 4 \div 33 = 0.121212\cdots$$

에서 12가 반복되여 나타나므로 $\frac{4}{33} = 0.(12)$ 입니다.

$$\frac{8}{27} = 8 \div 27 = 0.296296296\cdots$$

에서 296이 반복하여 나타나므로 $\frac{8}{27} = 0.(296)$ 입니다. 이 5

개 분수는 모두 가장 간단한 분수입니다. 분모에는 2,5와 같은 씨수가 포함되여있지 않습니다. 그러므로 그것들을 모두 순환소수로 넘길수 있습니다.

$\frac{2}{3}=0.(6)$ 의 순환마디의 최소자리수는 1자리이며 적어도 한개의 9로 된 한자리수 9만이 분모 3으로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{3}{11}=0.(27)$ 의 순환마디의 최소자리수는 2자리이며 2개의 9로 된 두자리수 99만이 분모 11로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{5}{7}=0.714285$ 의 순환마디의 최소자리수는 6자리이며 6개의 9로 된 6자리수 999,999만이 분모 7로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{4}{33}=0.12$ 의 순환마디 최소자리수는 2자리이며 2개의 9로 된 2자리수 99만이 분모 33으로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{8}{27}=0.296$ 의 순환마디 최소자리수는 3자리이며 3개의 9로 된 999만이 분모 27로 말끔히 나누어집니다.

이상의 고찰을 종합하여 다음과 같은 결론을 얻을수 있습니다. 어떤 가장 간단한 분수의 분모에 만일 2, 5외의 씨수가 포함되여있으면 이 분수는 반드시 순환소수로 고칠수 있습니다.

실례 2. 분수 $\frac{5}{6}$, $\frac{13}{165}$, $\frac{7}{150}$, $\frac{11}{222}$, $\frac{3}{56}$ 을 소수로 고치십시오.

따져보기 분수의 분자를 분모로 나누면 분수가 소수로 고쳐집니다.

풀기 $\frac{5}{6}=0.8333\cdots$, 3이 되풀이되므로 $\frac{5}{6}=0.8(3)$ 입니다.

$\frac{13}{165}=0.0787878\cdots$, 78이 되풀이되므로 $\frac{13}{165}=$ $=0.0(78)$ 입니다.

$\frac{7}{150}=0.04666\cdots$, 6이 되풀이되므로 $\frac{7}{150}=0.04(6)$ 입니다.

$\frac{11}{222}=0.0495495\cdots$, 495가 되풀이되므로 $\frac{11}{222}=$ $0.0(495)$입니다.

$\frac{3}{56}=0.05357142857142857142 8$, 571428이 되풀이되므로 $\frac{3}{56}=0.053(571428)$ 입니다.

$\frac{5}{6}=0.8(3)$ 에서 순환되지 않는 부분의 수는 1개뿐이고 순환마디의 최소자리수는 1입니다. 6=2×3이고 분모 6에는 1개의 2만 있습니다. 적어도 1개의 9로 된 한자리수 9는 분모에 있는(2와 5외의) 씨수 3으로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{13}{165}=0.0(78)$ 에서 순환되지 않는 부분의 수는 1개뿐입니다. 순환마디의 최소자리수는 2자리이고 165=5×33입니다. 분모 165에는 1개의 5가 있고 적어도 2개의 9로 된 두 자리수 99는 분모에 있는(2, 5외의) 씨수의 적 33으로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{7}{150}=0.04(6)$ 에서 순환되지 않는 부분의 수는 2자리이고 순환마디의 최소자리수는 1자리입니다. $150=2\times5^2\times3$이며 분모 150에 2, 5가 있으며 1개의 9로 된 한 자리수 9는 분모에 있는 (2, 5외의) 씨수 3으로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{11}{222}=0.0(495)$ 에서 순환되지 않는 부분의 수는 1개뿐이며 순환마디의 최소자리수는 3자리이며 222=2×111입니

다. 분모 222에는 2만 있고 3개의 9로 된 3자리수 999는 분모에 있는 (2, 5외의) 씨수의 적 111로 말끔히 나누어집니다.

$\frac{3}{36}=0.053(571428)$ 에서 순환되지 않는 부분의 수는 3개이며 순환마디의 최소자리수는 6자리입니다. $56=2^3\times7$이고 분모 56에 2가 3개이고 적어도 6개의 9로 된 6자리수 999,999는 분모에 있는 (2, 5외의) 씨수 7로 말끔히 나누어집니다.

이상의 고찰을 종합하여 다음과 같은 결론을 얻을수 있습니다.

어떤 가장 간단한 분수의 분모에 만일 2, 5와 같은 씨수가 들어있고 또 2, 5외의 씨수가 들어있으면 이 분수는 반드시 혼순환소수로 고쳐질수 있고 그것의 순환되지 않는 부분의 수 개수는 분모에 있는 2, 5인 수의 개수중에서 큰수의 개수와 같습니다. 순환마디의 최소자리수는 9,99,999,…에서 분모에 있는 (2, 5외의) 씨수 (또는 씨수 적)로 말끔히 나누어질 때 거기에 있는 9의 최소개수와 같습니다.

실례 3. 나누기연산이 없이 다음의 분수들에서 어느것은 유한소수로 고칠수 있고, 어느것은 순순환소수로, 어느것은 혼순환소수로 고칠수 있는가를 밝히십시오. 유한소수로 고칠 때 소수부분은 몇자리입니까? 순환소수로 고칠 때 순환되지 않는 부분의 수의 개수와 순환마디의 최소자리수는 각각 몇입니까?

(1) $\frac{3}{11}$ (2) $\frac{7}{24}$ (3) $\frac{6}{27}$ (4) $\frac{161}{120}$ (5) $\frac{121}{440}$

따져보기: 나누기연산을 쓰지 말라고 하였으므로 매 분수의 분모를 씨수로 분해하여야 합니다. 이때 우에서 지적한 결론에 따라 결과를 쉽게 지적할수 있습니다.

풀기 (1) $\frac{3}{11}$에서 분모 11은 2, 5외의 씨수이며 11은 99를 말끔히 나누므로 $\frac{3}{11}$은 순순환소수로 고칠수 있고 순환마디의 최소자리수는 2자리입니다.

⑵ $\frac{7}{24}$에서 $24=2^3\times3$이며 분모에 3개의 2가 있고 또 3은 9를 말끔히 나누므로 $\frac{7}{24}$은 반드시 혼순환소수로 고쳐질수 있고 순환하지 않는 부분의 수자리는 3이며 순환마디의 최소자리수는 1자리입니다.

⑶ $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$이고 $\frac{2}{9}$는 가장 간단한 분수이며 9는 또 2, 5외의 씨수의 적이며 9는 9로 말끔히 나누어지므로 $\frac{6}{27}$은 순순환소수로 표시될수 있으며 순환마디의 최소자리수는 1자리입니다.

⑷ $\frac{161}{120}$에서 $120=2^3\times3\times5$이고 3은 9를 말끔히 나누므로 $\frac{161}{120}$은 혼순환소수로 표시될수 있으며 순환되지 않는 부분의 수는 3개, 순환마디의 최소자리수는 1자리입니다.

⑸ $\frac{121}{440}=\frac{11}{40}$이고 $\frac{11}{40}$에서 $40=2^3\times5$입니다. 그러므로 $\frac{121}{440}$은 유한소수로 고칠수 있으며 소수부분의 수는 3개입니다.

실례 4. 다음의 조건에 맞는 최대분수를 쓰십시오. 그것의 분자는 1이고 그것을 고칠수 있는 소수는

⑴ 순환마디의 최소자리수가 4인 순순환소수

⑵ 순환되지 않는 부분이 2개 수이고 순환마디의 최소자리수가 3인 혼순환소수

따져보기 구하려는 분수의 분자가 1이므로 기본은 분모이며 또 최대인 분수를 찾아야 하므로 분모는 반드시 최소여야 합니다.

⑴ 분수를 소수로 고치되 그것이 순순환소수이고 순환마디의 최소자리수가 4로 되게 하려면 분모는 반드시 2,

5외의 수로서 9,999를 말끔히 나눌수 있는 씨수 또는 씨수를 련이어 곱한 적이여야 합니다. $9,999=9\times11\times101$이고 3, 9는 9를 말끔히 나누며 11, 33, 99는 99를 말끔히 나누므로 조건이 만족되는 분모는 1입니다.

(2) 분수를 소수로 고치되 그것이 혼순환소수이고 순환되지 않는 부분이 2개 수이며 순환마디의 최소자리수가 3이기 위해서는 분모가 반드시 $2^n\times5^m\times p$(여기서 n, m은 옹근수이고 p는 2, 5외의 씨수 또는 씨수를 련이어 곱한 적)여야 하며 분모가 최소이기 위해서는 n=2, m=0이여야 합니다. P는 999를 말끔히 나눌수 있어야 합니다. $999=27\times37$이고 3, 9는 9를 말끔히 나눌수 있고 27<37이므로 p=27입니다. 따라서 분모는 $2^2\times5^0\times27=108$입니다.

풀기 (1) 분자는 1이고 $9,999=9\times11\times101$입니다. 분수를 소수로 고친 다음 순환마디의 최소자리수가 4인 순순환소수의 모든 분수중에서 최대여야 하므로 분모는 101이고 분수는 $\frac{1}{101}$입니다.

(2) $999=27\times37$입니다. 분수를 소수로 고친 다음 순환되지 않는 부분은 2개 수이고 순환마디의 최소자리수가 3이며 이와 같은 모든 분수중에서 최대여야 하므로 분모는 $2^2\times27=108$이여야 하고 분수는 $\frac{1}{108}$입니다.

실례 5. 0.(123)과 0.4(13)을 고치십시오.

풀기 0.(123)=0.123123123… (1)

0.(123)×1000=123.123123123… (2)

입니다. (1)과 (2)식의 량변을 변끼리 덜면

$$0.(123)\times1000-0.(123)=123.123123\cdots-0.123123123\cdots$$

이것을 정돈하면

$$0.(123)\times999=123$$

즉 $0.(123)=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$

꼭같이

$$0.4(13)=0.413131313\cdots \quad (3)$$

$$0.4(13)\times 10=0.4131313\cdots \times 10=4.131313\cdots \quad (4)$$

$$0.4(13)\times 1000=0.4131313\cdots \times 1000=413.131313\cdots \quad (5)$$

(4)식과 (5)식의 량변을 변끼리 덜면

$$0.4(13)\times 1000-0.4(13)\times 10=413.131313-4.131313\cdots$$

이 되는데 정돈하면

$$0.4(13)\times 990=413-4$$

즉 $0.4(13)=\frac{413-4}{990}=\frac{409}{990}$

이 실례에서 볼수 있는바와 같이 어떤 순순환소수의 소수부분을 다음과 같은 분수로 고칠수 있습니다. 이 분수의 분자는 순환마디가 표시하는 수이고 분모의 매 자리의 수는 모두 9이고 9의 개수는 순환마디의 수의 개수와 같습니다. 혼순환소수의 소수부분은 다음과 같은 분수로 고칠수 있습니다. 이 분수의 분자는 두번째 순환마디전의 소수부분의 수로 된 수와 소수부분에서 순환되지 않는 부분의 수로 된 수의 차입니다. 분모의 앞 몇자리수는 모두 9이고 9의 뒤의 수는 모두 0이고 0의 개수는 순환되지 않는 부분의 수의 개수와 같습니다. 그리고 9의 개수와 순환의 수의 개수는 같습니다.

련습 18

1. 다음의 분수에서 어느것을 유한소수로 고칠수 있고 어느것을 순순환소수로 고칠수 있으며 어느것을 혼순환소수로 고칠수 있는가를 지적하십시오. 유한소수의 자리수순환되지 않는 부분의 수의 개수, 순환마디의 순환자리수는 각각 몇입니까?

$$\frac{3}{40},\ \frac{5}{12},\ \frac{88}{77},\ \frac{75}{37},\ \frac{3}{14},\ \frac{4}{505}$$

2. 다음의 조건을 만족시키는 최대분수를 구하십시오. 그것의 분자는 1이고 고치려는 소수는 다음과 같습니다.

(1) 순환마디가 한자리수인 순순환소수

(2) 순환되지 않는 부분이 한자리수이고 순환마디의 최소자리수가 2인 혼순환소수

3. 분자는 1이고 분모는 두자리수이며 순환되지 않는 부분은 한자리수, 순환마디의 최소자리수가 2인 혼순환소수를 구하십시오.

4. 다음의 매 순환소수를 분수로 고치십시오.

0.5(18), 0.217(305), 0.(312), 10.(296)

5. 0.1(2)+0.2(3)+0.3(4)+0.4(5)+0.5(6)+0.6(7)+0.7(8)+0.8(9)를 계산하십시오.

답 및 풀기방향

1. $\frac{3}{40}$에서 $40=2^3\times5$이므로 $\frac{3}{40}$은 반드시 유한소수로 고칠수 있고 소수부분의 수는 3개입니다.

$\frac{5}{12}$는 가장 간단한 분수이고 $12=2^2\times3$이고 3은 2, 5외의 씨수이고 3은 9를 말끔히 나눌수 있으므로 $\frac{5}{12}$는 혼순환소수로 고칠수 있습니다. 순환되지 않는 부분의 수는 2개이며 순환마디의 최소자리수는 1자리입니다.

$\frac{88}{77}=\frac{8}{7}$이고 $\frac{8}{7}$은 가장 간단한 분수로서 분모 7은 2, 5외의 씨수이며 적어도 6개의 9로 된 6자리수 999,999가 7로 말끔히 나누어지므로 $\frac{88}{77}$은 순순환소수로 고칠수 있고 순환마디 최소자리수는 6자리입니다.

$\frac{75}{37}$는 가장 간단한 분수이고 37은 2, 5외의 씨수이며 적어도 3개의 9로 된 3자리수 999가 37로 말끔히 나누어지므로 $\frac{75}{37}$는 순순환소수로 고쳐질수 있고 순환마디의 최소자리수는 3자리입니다.

$\frac{3}{14}$에서 $14=2\times7$이며 적어도 6개의 9로 된 6자리수 999,999만이 2, 5를 제외한 씨수 7로 말끔히 나누어지므로 $\frac{3}{14}$은 혼순환소수로 고쳐질수 있고 순환되지 않는 부분의 수는 1자리이며 순환마디의 최소자리수는 6자리입니다.

$\frac{4}{505}$는 가장 간단한 분수이고 $505=5\times101$이며 적어도 4개의 9로 된 4자리수 999만이 2, 5를 제외한 씨수 101로 말끔히 나누어집니다. 그러므로 $\frac{4}{505}$는 혼순환소수로 고칠수 있고 순환되지 않는 부분의 수는 1자리, 순환마디의 최소자리수는 4자리입니다.

2. ⑴ $\frac{1}{3}$, ⑵ $\frac{1}{22}$

⑴ 분수를 소수로 고친 다음 순환마디에는 한자리의 수만 있는 순순환소수만 있어야 하고 분모는 될수록 작아야 하므로 분모는 2, 5를 제외한 9를 말끔히 나눌수 있는 될수록 작은 씨수 또는 씨수의 적이여야 합니다. 이와 같은 수는 3뿐입니다. 그러므로 구하려는 분수는 $\frac{1}{3}$입니다.

⑵ 분수는 혼순환소수로 고칠수 있으므로 분모에는 2, 5와 같은 씨수가 포함되여있고 또 2, 5외의 씨수도 포함되여있어야 합니다. 또 순환되지 않는 부분은 한자리수만 있고 될수록 작아야 하므로 분모에는 1개의 2만 있어야 합니다. 그밖에 순환마디의 최소자리수는 두자리로서

$99=3^2\times11$이며 3, 9는 9를 말끔히 나누며 33, 99도 99를 말끔히 나눌수 있습니다. 그런데 또 11보다 크므로 분모에는 2, 5를 제외한 씨수는 11만을 취할수 있고 $2\times11=22$이므로 구하려는 분수는 $\frac{1}{22}$ 입니다.

3. $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{55}$, $\frac{1}{66}$

분수를 소수로 고칠 때 순환되지 않는 부분은 한자리수이므로 분모에 2, 5를 포함한 경우는 다음의 세가지 경우일수 있습니다. 1개의 2, 1개의 5, 1개의 2와 1개의 5입니다. 또 분수를 소수로 고칠 때 순환마디의 최소자리수는 2이고 99의 약수로는 1, 3, 9, 11, 33, 99가 있는데 3, 9는 9를 말끔히 나눌수 있으므로 분모에 2, 5외의 씨수(또는 씨수의 련이어있는 적)에도 11, 33, 99의 세가지가 있습니다. 또 분모는 두자리수이므로 분모로는 2×11, 5×11, 2×33의 세가지 경우뿐입니다. 그러므로 조건을 만족시키는 분수는 $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{55}$, $\frac{1}{66}$의 세가지뿐입니다.

4. $0.5(18)=\frac{518-5}{990}=\frac{57}{110}$

$$0.217(305)=\frac{217{,}305-217}{999{,}000}=\frac{27{,}136}{124{,}857}$$

$$0.(312)=\frac{312}{999}=\frac{104}{333}$$

$$10.(296)=10\frac{296}{999}=10\frac{8}{27}$$

5. $4\frac{4}{45}$

$$0.1(2)+0.2(3)+0.3(4)+0.4(5)+0.5(6)+0.6(7)+$$
$$+0.7(8)+0.8(9)=$$
$$=\frac{12-1}{90}+\frac{23-2}{90}+\frac{34-3}{90}+\frac{45-4}{90}+\frac{56-5}{90}+\frac{67-6}{90}+$$

$$+\frac{78-7}{90}+\frac{89-8}{90}=$$

$$=\frac{11+21+31+41+51+61+71+81}{90}$$

$$=4\frac{4}{45}$$

제19절. 홀수와 짝수

2로 말끔히 나누어지는 수를 짝수라고 부르고 2로 말끔히 나누어지지 않는 수를 홀수라고 부릅니다. 짝수는 2의 배수이므로 보통 $2k$(k는 옹근수)로 표시합니다. 임의의 홀수를 2로 나누면 나머지가 1이므로 홀수를 $2k+1$로 표시합니다.

홀수와 짝수의 성질은 다음과 같습니다.

성질 1. 두 짝수의 합 또는 차는 짝수입니다.

짝수+짝수=짝수, 짝수－짝수=짝수

실례를 들면 $8+4=12, 8-4=4$ 등입니다.

두 홀수의 합 또는 차도 짝수입니다.

홀수+홀수=짝수, 홀수－홀수=짝수

실례를 들면 $9+3=12, 9-3=6$ 등입니다.

홀수와 짝수의 합 또는 홀수와 짝수의 차는 홀수입니다.

홀수+짝수=홀수, 홀수－짝수=홀수

실례를 들면 $9+4=13, 9-4=5$ 등입니다.

홀수개의 홀수의 합은 홀수이고 짝수개의 홀수의 합은 짝수이며 임의의 개수의 짝수의 합은 짝수입니다.

성질 2. 홀수와 홀수의 적은 홀수입니다. 홀수×홀수=홀수

실례를 들면 $9\times11=99, 13\times5=65$ 등입니다.

짝수와 옹근수의 적은 짝수입니다.

실례를 들면 $2\times5=10, 2\times8=16$ 등입니다.

성질 3. 임의의 홀수는 임의의 짝수와 같을수 없습니다.

이제 이 성질들을 리용하여 몇개의 문제를 풀어봅시다.

실례 1. 마시는쪽이 모두 우로 향한 9개의 고뿌가 책상우에 놓여있습니다. 유한번의 뒤집기조작을 거쳐 9개의 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 향하게 할수 있습니까? 그것들중에서 4개를 매번 동시에 뒤집어야 합니다. 무엇때문입니까?

따져보기 마시는쪽이 우로 향한 매 고뿌에 대하여 뒤집기를 1번, 3번 …을 실시하여야만 고뿌의 마시는쪽이 아래로 향합니다. 즉 매 고뿌에 대하여 홀수번 뒤집으면 아래로 향합니다. 9개 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 내려가게 해야 하므로 매 고뿌를 모두 홀수번 뒤집어야 합니다. 앞에서 지적한 성질에 의하여 이 9개 홀수의 합은 반드시 홀수여야 합니다. 즉 홀수번의 뒤집기를 하여야만 9개 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 향합니다.

또 매번 동시에 4개의 고뿌를 뒤집어야 합니다. 즉 어떻게 뒤집는가에 관계없이 마지막뒤집기의 총 회수는 반드시 4의 배수로 되여야 합니다. 4는 짝수이므로 뒤집기의 총 회수는 짝수입니다. 그런데 앞에서 뒤집기의 총 회수는 홀수여야 한다고 지적하였습니다. 여기서는 그것이 반드시 짝수여야 한다고 하였으므로 임의의 홀수는 짝수와 같을수 없습니다. 그러므로 뒤집기의 회수가 몇번인가에 관계없이 이 9개 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 향하게 할수 없습니다.

풀기 매 고뿌는 다만 홀수번의 뒤집기를 거쳐야만 고뿌의 마시는 쪽이 우로 향한 상태로부터 아래로 향한 상태로 되게 할수 있습니다. 마시는쪽이 우로 향한 9개 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 향하게 하려면 매 고뿌를 모두 홀수번 뒤집어야 합니다. 이 9개 홀수의 합은 홀수 즉 어떻게 뒤집는가에 관계없이 9개 고뿌를 뒤집는 총 회수는 반드시 홀수여야 합니다.

이밖에 매번 4개의 고뿌를 동시에 뒤집어야 하므로

어떻게 뒤집는가에 관계없이 뒤집기의 총 회수는 짝수여야 합니다.

임의의 홀수는 어떤 짝수와 같은 성질을 가질수 없으므로 문제의 조건에 맞게 유한번의 뒤집기를 거쳐 고뿌의 마시는쪽이 모두 아래로 향하게 할수 없습니다.

실례 2. 그림 19－1과 같은 6×6의 바른4각형모양의 바둑판의 매 칸에 1~36의 36개수를 한개씩 써넣어(매 수는 한번만 씁니다.) 바둑판의 임의의 한개가 그림 19－2와 같은 4가지 모양의 도형에 준 4개 수의 합이 모두 짝수로 되게 할수 있습니까? 만일 할수 있다면 구체적인 쓰기를 지적하십시오.

그림 19 － 1

만일 할수 없다면 그 리유를 설명하십시오.

그림 19 － 2

따져보기 1부터 36까지의 수를 36개 칸에 써넣는 방법은 매우 많습니다.

이제 거꾸로 다음과 같은 문제를 생각해봅시다.

만일 문제의 조건을 만족시키는 쓰기법을 찾을수 있다면 그림 19－3과 같은 도형이 반드시 있어야 합니다. 그것의 5개 칸에 쓴 수가 각각 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 일 때 다음과 같은 4개의 같기식이 얻어질수 있습니다.

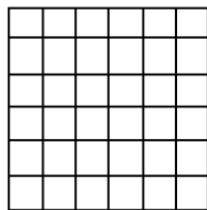
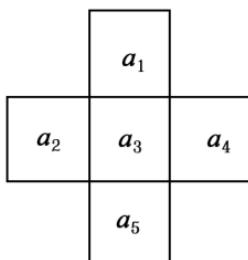
$a_1+a_2+a_3+a_4=$짝수　　　(1)

$a_1+a_2+a_3+a_5=$짝수　　　(2)

$a_1+a_3+a_4+a_5=$짝수　　　(3)

$a_2+a_3+a_4+a_5=$짝수　　　(4)

그림 19 － 3

(1)과 (2)식을 서로 덜면 같기부호의 왼쪽은 a_4, a_5의 차이고 같기부호의 오른쪽은 두 짝수를 서로 던것으로서 그 차는 짝수입니다. 이것은 a_4

와 a_5의 차가 짝수라는것을 말해주므로 a_4와 a_5는 다같이 홀수이거나 다같이 짝수입니다.

꼭같이 (1), (3)의 두 식을 서로 덜면 a_2과 a_4가 다같이 홀수이거나 또는 다같이 짝수라는것이 알려집니다.

(1), (4)의 두 식을 서로 덜면 a_1와 a_5이 다같이 홀수이거나 또는 다같이 짝수라는것이 알려집니다.

이렇게 하여 a_1, a_2, a_3, a_4은 다같이 홀수이거나 또는 짝수여야 합니다. (1) 식을 다시 봅시다. a_1, a_2, a_4, a_5이 다같이 홀수일 때 a_1, a_2, a_3, a_4의 합이 짝수이기 위해서는 a_3도 홀수여야 하고 a_1, a_2, a_4, a_5이 다같이 짝수일 때 a_1, a_2, a_3, a_4의 합이 짝수이기 위해서는 a_3도 짝수여야 합니다. 이것은 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 5개 수가 다같이 홀수이거나 다같이 짝수여야 한다는것을 말합니다.

이밖에 그림 19－3의 도형에서 그림 19－1에 있는 6×6인 바둑판의 4개 모서리에서 나타날수 없는것을 제외한 나머지 칸에서는 나타날수 있습니다. 이렇게 그림 19－1에서 모서리의 4개 칸을 제외한 32개의 작은 칸에 쓸수 있는 수는 모두 홀수이거나 짝수여야 합니다. 그런데 1부터 36까지의 자연수중에서 가장 많아서 18개만이 다같이 홀수이거나 또는 다같이 짝수입니다. 32개의 수가 다같이 홀수이거나 다같이 짝수일수 없습니다. 이것은 문제의 조건을 만족시키는 쓰기방법이 있을수 없다는것을 말해줍니다.

풀기 만일 문제의 조건을 만족시키는 쓰기방법이 있다면 그림 19－1에서 4개 모서리에 있는 칸을 제외한 32개의 작은칸에 써넣어야 할 수는 모두 홀수이거나 모두 짝수여야 합니다. 그런데 1부터 36까지의 36개의 자연수중에 18개만 홀수이고 18개는 짝수이므로 32개의 수가 다같이 홀수이거나 다같이 짝수인 경우는 있을수 없습니다. 그러므로 문제의 요구를 만족시키는 쓰기방법은 있을수 없습니다.

실례 3. 1,997개의 구가 있습니다. 몇사람이 어떤 방법으로 나누는가에 관계없이 (나눌 때 구를 쪼개지 않습니다) 마지막에 매 사람이 홀수개의 구를 가지게 되는 인

원수의 합은 짝수로 될수 없습니다. 무엇때문입니까?

따져보기 실례 2인 경우와 마찬가지로 이 문제에서도 실험적인 방법을 쓸수 없습니다. 왜냐하면 구를 나누어가져야 할 인원수가 같지 않으며 나누기방법도 같지 않기때문입니다. 하지만 구를 몇사람이 나누어가져야 하는가에 관계없이 짝수, 홀수의 각도에서 보면 두가지 경우만이 가능합니다. 즉 인원수가 홀수 또는 짝수인 경우뿐입니다. 이제 이 두가지 경우를 따져봅시다.

만일 구를 가질 전체 인원수가 짝수이면 이 짝수명의 사람을 또 두가지 경우로 가릅니다. 첫번째 부류에 속하는 매 사람에게 나누어주는 구의 개수가 모두 짝수일 때와 두번째 부류에 속하는 매 사람에게 나누어주는 구의 개수가 모두 홀수인 경우로 가릅니다. 두번째 부류에 속하는 인원수의 합이 짝수일 때 짝수에서 짝수를 덜면 짝수라는 성질에 의하여 첫번째 부류에 속하는 인원수의 합도 짝수라는 것을 알수 있습니다. 이제 이 두가지 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 개수 합을 계산합시다. 첫번째 부류인 경우를 먼저 계산합시다. 이 부류에 속하는 인원수의 합은 짝수이고 매 사람에게 차례지는 구의 개수도 짝수입니다. 짝수에 짝수를 더하면 짝수이므로 첫번째 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 총 개수도 짝수로 됩니다. 다음 두번째 부류의 사람들이 가지게 되는 구의 총 개수를 계산합시다. 두번째 부류에 속하는 인원수의 합은 짝수이고 매 사람이 가지게 되는 구의 개수는 홀수이며 짝수개의 홀수 합은 짝수라는데로부터 두번째 부류에 속하는 사람들이 가지게 되는 구의 총 개수는 짝수입니다. 짝수에 짝수를 더하면 그 합도 짝수라는 성질에 의하여 이 두가지 부류에 속한 사람들에게 차례지는 구의 총 개수는 짝수입니다. 그런데 1,997은 홀수이므로 이와 같은 경우는 있을수 없습니다.

만일 구를 나누어가져야 할 인원수가 홀수이면 앞에서와 같이 이 홀수명의 사람을 두가지 부류로 가릅니다. 즉 첫번째 부류에 속하는 매 사람에게 차례지는 구의 개수가 모

두 짝수인 경우와 두번째 부류에 속하는 매 사람에게 차례지는 구의 개수가 모두 홀수인 경우입니다. 두번째 부류에 속한 인원수의 합이 짝수일 때 첫번째 부류에 속하는 인원수 합이 홀수로 된다는것을 알수 있습니다. 왜냐하면 홀수와 짝수의 차는 홀수이기때문입니다. 이제 이 두가지 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 개수를 따집시다. 첫번째 부류에 속하는 사람수는 홀수이고 매 사람에게 차례지는 구의 개수는 모두 짝수이므로 몇개 짝수의 합은 짝수라는 성질에 의하여 첫번재 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 총 개수도 짝수라는것을 알수 있습니다. 두번째 부류에 속하는 사람들이 가지게 될 구의 총 개수를 계산합시다. 두번째 부류에 속하는 인원수의 합은 짝수이고 매 사람에게 차례지는 구의 개수는 홀수입니다. 그러므로 짝수개의 홀수합은 짝수라는 성질에 의하여 두번째 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 총 개수는 짝수입니다. 이렇게 두가지 부류에 속하는 사람들에게 차례지는 구의 개수합은 짝수입니다. 그런데 1,997은 홀수이므로 이와 같은 경우는 있을수 없습니다.

이상과 같은 따져보기에 의하여 매 사람에게 홀수개의 구를 나누어주는 인원수의 합은 짝수로 될수 없다는것을 알수 있습니다.

풀기 문제의 조건에 의하여

(짝수+짝수+⋯+짝수)+(홀수+홀수+⋯+홀수)=1,997

이 됩니다. 구를 나누어주는 총 인원수가 홀수이건 짝수이건 관계없이 첫번째 괄호안의 모든 수의 합은 짝수입니다. 두번째 괄호안의 수들을 다시 봅시다. 만일 매 사람에게 나누어주는 구의 개수가 모두 홀수명의 합으로서 짝수라면 두번째 괄호안의 홀수의 개수는 짝수로 되며 짝수개 홀수의 합은 짝수라는데 의하여 두번째 괄호안의 모든 수의 합도 짝수여야 합니다. 이렇게 짝수+짝수=1,997이 되는데 이것은 불가능합니다. 왜냐하면 임의의 짝수는 임의의 홀수와 같을수 없기때문입니다. 그러므로 매 사람에게 나누어주는 구의 개수가 모두 홀수로 되게 하는 총 인원수

는 홀수뿐이지 짝수가 아닙니다.

[설명] 실례 2, 실례 3을 푸는 과정에 홀수와 짝수의 성질밖에 거꾸로 생각하는 방법을 썼습니다. 즉 먼저 어떤 내용이 정확하다고 가정한 다음 이 방법과 기타 성질을 리용하여 따져보고 마지막에 결론이 정확하지 않다는 것을 말하였습니다. 즉 가정이 성립할수 없다고 말함으로써 결론의 정확성을 증명하였습니다. 이와 같이 생각하는 방법을 수학에서는 《반증법》이라고 부릅니다.

실례 4. 어떤 수렬이 있는데 제일 앞에 있는 4개수는 차례로 1, 9, 8, 7이며 5번째 수부터 시작하여 매개 수는 모두 그 앞에 있는 서로 린접인 4개수의 합의 하나자리수입니다. 이 수렬에 차례로 1, 9, 8, 8의 4개수가 나타나겠습니까?

따져보기 먼저 문제의 조건에 따라 1, 9, 8, 7의 뒤에 몇개의 수를 써봅시다.

1, 9, 8, 7, 5, 9, 9, 0, 3, 1, 3, 7, 4, …

이렇게 문제의 조건에 맞게 계속 써내려갈수 있으므로 직접 쓰는 방법으로는 이 문제를 풀수 없습니다. 그러나 만일 우의 수렬에 있는 수를 홀수, 짝수에 따라 써보면 다음과 같이 됩니다.

홀수, 홀수, 짝수, 홀수, 홀수, 홀수, 홀수, 짝수, 홀수, 홀수, 홀수, 홀수, 짝수, …

이제 이 수렬에 어떤 규칙이 없겠는가를 따져봅시다. 홀수에 홀수를 더한 합은 짝수이고 홀수에 짝수를 더한 합은 홀수라는 성질에 의하여 5, 6, 7번째 수는 모두 홀수이고 8번째 수는 짝수이라는것을 알수 있습니다. 다시 5, 6, 7, 8번째의 4개수가 홀수인가, 짝수인가를 리용하여 9, 10, 11, 12번째의 4개 수가 모두 홀수라는것을 알수 있고 13번째 수가 또 짝수라는것을 알수 있습니다. 이 수렬에서 4번째 수부터 시작하여 그 뒤의 매 수는 4개가 홀수이고 1개가 짝수라는 규칙이 순환된다는것을 알수 있습니다. 1, 9, 8, 8에서 두개의 홀수뒤에 두개의 짝수가 있습니다. 그러므로 이 수렬에 1, 9, 8, 8인 4개 수가 나타날수 없습니다.

풀기 홀수와 짝수의 성질에 의하여 다음과 같은 규칙을 찾을수 있습니다. 문제의 조건에 맞게 배렬한 수렬의 4번째 수부터 시작하여 그 뒤의 매 수는 모두 4개의 홀수, 1개의 짝수라는 규칙의 순환입니다. 그런데 1, 9, 8, 8에서 앞 2개는 홀수이고 뒤의 2개는 짝수입니다. 그러므로 이 수렬에 1, 9, 8, 8인 4개 수가 나타날수 없습니다.

련습 19

1. 점 O를 바른 12각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ 의 중심이라고 합시다. 바른 12각형의 매 변에 임의로 번호 1, 2, 3, …, 11, 12를 달고 1부터 12까지의 12개의 수에 12개의 선분 OA_1, OA_2, OA_3, …, OA_{11}, OA_{12}인 번호를 답니다. 12개의 3각형 A_1OA_2, A_2OA_3, …, $A_{11}OA_{12}$, $A_{12}OA_1$의 매 변우의 번호의 합이 모두 같게 하는 번호달기방법이 있겠습니까? 가능하다면 구체적인 번호를 매기고 불가능하면 그 리유를 설명하십시오(그림 19－4).

그림 19 － 4

2. 123, 124, 125의 3개 수를 (그림 19－5) A, B, C의 3개의 동그라미안에 써넣은 다음 다음의 규칙에 따라 이 3개 수를 수정합니다.

첫번째 걸음. B가운데의 수를 A가운데의 수로 고치고 B의 수와 더합니다.

두번째 걸음. C의 수를 B의 수로 고치고 C의 수와 더합니다.

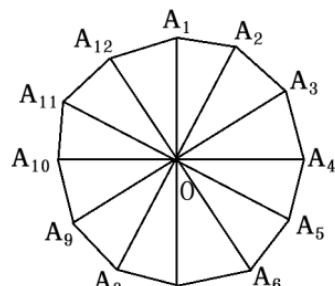
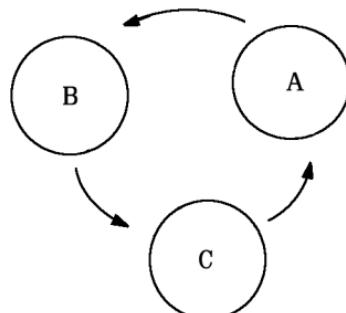



그림 19 － 5

세번째 걸음. A의 수를 C의 수로 고치고 A의 수와 더합니다.

다시 첫번째 걸음에 돌아갑니다. 계속 순환합니다. 만일 어떤 한 걸음이 끝난 다음 A, B, C의 수가 모두 홀수로 되면 연산이 끝납니다. 될수록 연산걸음을 많이 하려면 124를 어느 동그라미안에 써넣어야 합니까?

3. 어떤 3자리수의 매 수의 순서를 임의로 바꾸어서 새 3자리수를 만듭니다. 실례를 들면 3자리수 423을 432, 324 등으로 바꿀수 있습니다. 이 새 3자리수와 본래의 3자리수의 합이 999가 되게 할수 있습니까? 가능하다면 한개의 실례를 들고 불가능하면 그 리유를 설명하십시오.

4. 임의의 6개의 자연수를 그림 19－6의 6개의 작은 4각형안에 써넣었을 때 어떤 한개의 직4각형이 있어서 그것의 4개 모서리에 있는 4개의 작은 직4각형안의 4개수의 합이 짝수로 되게 할수 있다는것을 설명하십시오.

그림 19 － 6

5. 어떤 유희규칙은 다음과 같습니다. 칠판에 3개의 자연수를 씁니다. 다음 그중의 한개 수를 임의로 지워버립니다. 지워버리지 않은 2개 수의 합에서 1을 덜어냅니다. 이와 같은 조작을 여러번 하면 칠판에 17, 123, 139의 3개수가 있게 됩니다. 칠판에 시작할 때 쓴 3개 수가 2, 2, 2 또는 3, 3, 3이 될수 있습니까?

답 및 풀기방향

1. 문제의 조건을 만족시키는 번호달기방법은 있을수 없습니다.

각각 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}, b_1, b_2, \cdots, b_{12}$로써 12개의 변과 12개의 선분우의 번호를 대신합시다. 번호를 어떻게 달았는가에 관계없이 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}=b_1+b_2+\cdots+b_{12}=1+2+\cdots+12$입니다.

또 매 3각형의 세변우의 번호의 합은 모두 같습니다. 이 합을 S로 표시하면 12개의 3각형의 세변우의 번호의 총합은 12S입니다. 그밖에 12개의 3각형의 세변우의 번호의 합을 계산할 때 $b_1, b_2, \cdots, b_{12}$은 모두 두번 리용되였습니다. 이렇게 되여

$$12S=(a_1+a_2+\cdots+a_{12})+(b_1+b_2+\cdots+b_{12})\times 2$$

즉 $12S=3\times(1+2+\cdots+12)=3\times\dfrac{12\times 13}{2}$

입니다. 정돈하면 $2S=3\times 13=39$이고 39는 홀수이며 2S는 짝수입니다. 홀수는 짝수와 같을수 없다는데 의하여 문제의 조건을 만족시키는 번호달기방법은 있을수 없습니다.

2. 124를 동그라미 A안에 써넣어야 합니다.

홀수 123, 125를 1로 대신하고 짝수 124를 0으로 대신합시다. 124를 A에 써넣고 규칙에 따라 동그라미안의 수를 수정합니다. 모두 6걸음의 연산을 거치면 3개의 동그라미안의 수를 모두 홀수로 바꿀수 있습니다. 6걸음의 연산은 다음과 같습니다.

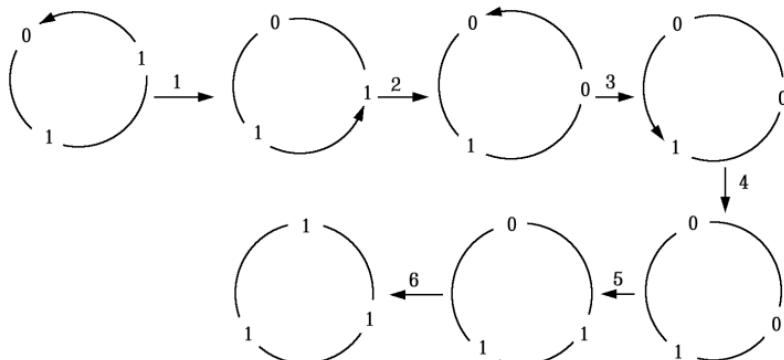



그림 19-7

실례를 들면 124를 B에 쓰면 한걸음이면 됩니다. 가령 124를 C에 쓰면 모두 5걸음의 연산이면 됩니다. 그러므로 124를 A에 써야 연산걸음이 가장 많아집니다.

3. 본래의 3자리수와 새 3자리수의 합이 999로 될수

없습니다.

본래의 3자리수를 $\overline{abc}$, 새 3자리수를 $\overline{a_1b_1c_1}$ (a_1, b_1, c_1는 a,b,c의 한개 배렬입니다.)라고 하면 $a+b+c=a_1+b_1+c_1$가 됩니다. 만일 $\overline{abc}+\overline{a_1b_1c_1}=999$이면 $c+c_1 \neq 19$이므로 $c+c_1=9$입니다. 꼭같이 $a+a_1=9$, $b+b_1=9$, $(a_1+a)+(b_1+b)+(c_1+c)=27$이고 그밖에

$(a_1+a)+(b_1+b)+(c_1+c)=(a+b+c)+(a_1+b_1+c_1)$이므로

$$2(a+b+c)=27$$

입니다.

$2(a+b+c)$는 짝수이고 27은 홀수이므로 두 수가 같을수 없습니다. 그러므로 본래의 3자리수와 새 3자리수의 합은 999로 될수 없습니다.

4. 6개의 작은 직4각형안에 써넣을 자연수를 각각 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$이라고 하면 아래의 3개 직4각형의 4개 모서리에 있는 4개수의 합은 $a_1+b_1+a_2+b_2$, $a_2+a_3+b_2+b_3$, $a_1+b_1+a_3+b_3$이 됩니다.

a_1	a_2
b_1	b_2

a_2	a_3
b_2	b_3

a_1		a_3
b_1		b_3

그림 19 － 8

만일 우의 3개 합이 모두 홀수이면 $(a_1+b_1+a_2+b_2)+(a_2+b_2+a_3+b_3)+(a_1+b_1+a_3+b_3)$은 홀수로 됩니다.

그밖에 $(a_1+b_1+a_2+b_2)+(a_2+b_2+a_3+b_3)+$

$$+(a_1+b_1+a_3+b_3)=2(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3)$$

입니다. 그리고 $2(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3)$은 짝수입니다. 홀수가 짝수와 같을수 없으므로 우의 3개 합은 동시에 홀수일수 없습니다. 그러므로 적어도 한개는 짝수입니다.

5. 시작할 때 쓴 3개 수는 3, 3, 3일수 있고 2, 2, 2로는 될수 없습니다.

가령 시작할 때의 3개 수가 2, 2, 2이면 구체적으로 따져보아서 처음 시작할 때 이후부터 매번 어떻게 바꾸는가에 관계없이 칠판우의 수는 모두 2개는 짝수이고 한개는 홀수입니다. 그리고 17, 123, 139의 3개 수는 모두 홀수이므로 시작할 때의 3개 수는 2, 2, 2일수 없습니다.

3, 3, 3일수 있습니다. 구체적인 바꾸기는 다음과 같습니다.

3, 3, 3→3, 3, 5→3, 5, 7→5, 7, 11→7, 11, 17→11, 17, 27→17, 27, 43→17, 43, 59→17, 59, 75→17, 75, 91→17, 91, 107→17, 107, 123→17, 123, 129

제20절. 씨인수분해

다 알고있는바와 같이 60을 씨수의 적으로 고치면 60=2×2×3×5로 됩니다. 이 식으로부터 알수 있는바와 같이 60은 약수 3외에 또 몇개의 약수를 가지고있습니다. 이제 씨인수분해와 관계되는 몇가지 문제를 고찰합시다.

실례 1. 다음의 8개의 수를 두조(매 조에 4개의 수)로 가르되 매 조에 있는 4개 수의 적이 같게 하려 합니다. 어떻게 가르면 됩니까?

1.4, 0.33, 3.5, 0.3, 0.75, 0.39, 14.3, 16.9

따져보기 이 문제를 만일 실험법을 써서 풀면 품이 많이 듭니다. 이제 거꾸로 생각해봅시다. 만일 4개씩 갈라놓았다면 8개 수에서 어떤 4개 수의 적과 나머지 4개 수의 적이 같을것이며 이 2개의 적이 소수이면 그 수들을 동시에 몇배로 확대해서 그것들을 옹근수로 고쳐도 이 2개의 적은 같아야 합니다. 이 2개의 수를 각각 씨인수분해하면 두 수의 씨수도 같아질것이며 같은 씨수의 개수도

갈아야 합니다.

이제 이 8개의 수를 100배로 확대하면 다음과 같은 8개의 수가 얻어집니다.

140, 33, 350, 30, 75, 39, 1,430, 1,690

이 8개의 수를 각각 씨인수분해하면 다음과 같습니다.

$140=2^2\times5\times7$, $33=3\times11$

$350=2\times5^2\times7$, $30=2\times3\times5$

$75=3\times5^2$, $39=3\times13$

$1,430=2\times5\times11\times13$, $1,690=2\times5\times13^2$

이 8개의 수를 씨인수분해하면 모두 2가 6개, 5가 8개, 7이 2개, 3이 4개, 11이 2개, 13이 4개입니다. 두조의 4개 수의 적이 같게 하기 위하여서는 매 조에 3이 2개, 5가 4개, 7이 1개, 3이 2개, 11이 1개, 13이 2개씩 들어가야 합니다. 이와 같은 요구에 의하여 8개 수를 적당히 배합하여 답을 찾으면 됩니다.

풀기 우의 따져보기에 기초하여 첫번째 조에 1,690, 33, 350, 30의 4개 수를 포함시키고 나머지의 4개 수를 두번째 조에 포함시키면 됩니다. 즉

$$1,690\times33\times350\times30=1,430\times39\times140\times75$$

두 변에 있는 수들을 다시 같은 몇배로 축소시키면 다음과 같은 한가지 가르기가 얻어집니다.

첫번째 조의 4개 수: 16.9, 0.33, 3.5, 0.3

두번째 조의 4개 수: 14.3, 0.39, 1.4, 0.75

이와 다른 가르기방법이 있겠는가를 생각해보십시오. 만일 있다면 그것을 찾아보십시오.

실례 2. 련이어 있는 5개의 홀수가 있는데 그것들을 곱한 적은 135,135입니다. 이 5개의 홀수를 구하십시오.

따져보기 이 5개의 홀수가 련이어 있으므로 이 5개 수의 중간에 있는 홀수를 x라고 가정하면 작은 수로부터 큰 수의 순서로 다음과 같이 배렬할수 있습니다.

$$x-4, x-2, x, x+2, x+4$$

문제의 조건에 의하여 다음과 같은 방정식을 세울수 있습니다.

$$(x+4)(x+2)x(x-2)(x-4)=135{,}135$$

그런데 방정식은 세웠으나 이 고차방정식의 풀이법은 아직 모릅니다. 다른 방도를 찾아야 합니다.

135,135를 씨인수분해하면 $135{,}135=3^3\times5\times7\times11\times13$이고 11과 13은 련이어 있는 두 홀수입니다. 이 사실로부터 출발하여야 합니다.

$3^3\times5\times7$을 적당히 조절하여 $3^3\times5\times7=7\times9\times15$가 되게 합니다. 그런데 7, 9, 11, 13, 15는 련이어 있는 5개 홀수입니다. 이렇게 분석해보면 쉽게 찾을수 있다는것을 알수 있습니다.

풀기 $135{,}135=3^3\times5\times7\times11\times13=7\times3^2\times11\times13\times(3\times5)$이므로 련이어 있는 5개의 홀수는 7, 9, 11, 13, 15입니다.

실례 3. 4,500의 약수는 몇개입니까?

따져보기 4,500에 몇개의 약수가 있는가를 알려면 원시적인 방법으로 세는 방법을 쓸수 있습니다.

가장 초보적인 방법은 그것의 약수를 하나씩 쓴 다음 다시 세여서 몇개인가를 결정하는것입니다. 이렇게 하려면 4,500을 씨인수분해하여야 합니다.

$4{,}500=2^2\times3^2\times5^3$입니다. 이제 수자방진의 형식으로 4,500의 모든 약수를 써봅시다. 씨수 2, 3만 포함하는 모든 약수를 쓰고 1을 첨가하여 다음과 같은 수자방진을 만듭니다.

1	3	3^2
2	2×3	2×3^2
2^2	$2^2\times3$	$2^2\times3^2$

이 수자방진에는 3개 렬이 있고 매 렬에 3개 수가 있습니다. 그러므로 3×3개의 약수가 있습니다. 다음 두번째 걸음으로 씨수 2, 3, 5를 포함하는 4,500의 모든 약수를 쓰면 다음과 같은 수자방진이 얻어집니다.

1	5	5^2	5^3
2	2×5	2×5^2	2×5^3
2^2	$2^2\times5$	$2^2\times5^2$	$2^2\times5^3$
3	3×5	3×5^2	3×5^3
3^2	$3^2\times5$	$3^2\times5^2$	$3^2\times5^3$
2×3	$2\times3\times5$	$2\times3\times5^2$	$2\times3\times5^3$
$2^2\times3$	$2^2\times3\times5$	$2^2\times3\times5^2$	$2^2\times3\times5^3$
2×3^2	$2\times3^2\times5$	$2\times3^2\times5^2$	$2\times3^2\times5^3$
$2^2\times3^2$	$2^2\times3^2\times5$	$2^2\times3^2\times5^2$	$2^2\times3^2\times5^3$

이 수자방진은 모두 9행이고 매 행에 4개의 약수가 있습니다. 그러므로 4,500에는 모두 $(9\times4=)36$개 약수가 있고 $36=3\times3\times4=(2+1)\times(2+1)\times(3+1)$입니다. 여기서 2, 2, 3은 4,500을 씨인수분해한 식의 씨수 2, 3, 5의 개수입니다. 이로부터 다음과 같은 약수의 개수를 구하는 한개의 중요한 결론이 얻어집니다.

1보다 큰 옹근수의 약수개수는 그것의 씨인수분해식에 있는 씨수에 1을 더한것을 련이어 곱한 적과 같습니다.

이 결론을 리용하여 다음과 같은 결과를 얻을수 있습니다.

$4,500=2^2\times3^2\times5^3$이고 $(2+1)\times(2+1)\times(3+1)=36$이므로 4,500은 36개의 약수를 가집니다.

실례 4. 어떤 수는 5개의 2, 4개의 3, 3개의 5, 2개의 7을 련이어 곱한 수입니다. 이 수는 여러개의 약수를 가지는데 그것은 3자리수입니다. 이 3자리수의 약수중에서 최대인 3자리수는 얼마입니까?

따져보기 만일 이 수를 N으로 표시하면 N은 5개의 2, 4개의 3, 3개의 5, 2개의 7을 련이어 곱한 적이므로 $N=2^5\times3^4\times5^3\times7^2$입니다. N의 3자리수 약수는 많습니다. 실례를 들면 $5^3=125$, $25\times3^2=288$, $2\times3\times5\times7=210$, $2^3\times5\times7=280$ 등입니다. 그런데 최대인 3자리수가 얼마인가를 찾는것은 그렇게 쉽지 않습니다. 만일 모두 3자리수의 약수를 전부 쓴다음 그중에서 최대인 3자리수를 찾는것은 매우 복잡합

니다.

이제 최대인 3자리수 999부터 시작합시다. N의 표준분해식 $2^5\times3^4\times5^3\times7^2$과 결합시켜 큰 수로부터 작은 수의 순서로 생각합니다. N의 표준분해식중에서 나타나는 약수를 점차적으로 빼버리는 방법으로 답을 찾아나갑니다.

풀기 $999=3^3\times37$입니다. 3^3은 N의 표준분해식에 있으나 씨수 37은 없습니다. 그러므로 999를 빼버려야 합니다.

$998=2\times499$이고 씨수 499는 N의 표준분해식가운데 없으므로 998도 지워버립니다.

997은 씨수이고 N의 표준분해식에 없으므로 997을 지워버려야 합니다.

996은 $2^2\times3\times83$이고 씨수 83은 N의 표준분해식에 없으므로 996도 버려야 합니다.

$995=5\times199$이고 씨수 199는 N의 표준분해식에 없으므로 995도 버려야 합니다.

$994=2\times7\times71$이며 씨수 71은 N의 표준분해식에 없으므로 994도 버려야 합니다.

$993=3\times331$이고 씨수 331은 N의 표준분해식가운데 없으므로 993도 버려야 합니다.

$992=2^5\times31$이고 씨수 31은 N의 표준분해식가운데 없으므로 992도 버려야 합니다.

씨수 991은 표준분해식에 없으므로 991도 버려야 합니다.

$990=2\times3^2\times5\times11$이고 씨수 11은 N의 표준분해식에 없으므로 990도 버려야 합니다.

$989=23\times43$이고 23, 43은 N의 표준분해식에 없으므로 989도 버려야 합니다.

$988=2^2\times13\times19$이고 씨수 13, 19는 N의 표준분해식가운데 없으므로 988도 버려야 합니다.

$987=3\times7\times47$이고 씨수 47은 N의 표준분해식에 없으므로 987도 버려야 합니다.

$986=2\times17\times29$이고 씨수 17, 29는 N의 표준분해식에

없으므로 986도 버려야 합니다.

$985=5\times197$이고 씨수 197이 N의 표준분해식에 없으므로 985도 버려야 합니다.

$984=2^3\times3\times41$이고 씨수 41이 N의 표준분해식에 없으므로 984도 버려야 합니다.

983은 씨수이고 N의 표준분해식에 나타나지 않으므로 983도 버려야 합니다.

$982=2\times491$이고 씨수 491이 N의 표준분해식에 없으므로 982도 버려야 합니다.

$981=3^2\times109$이고 씨수 109가 N의 표준분해식에 없으므로 981도 버려야 합니다.

$980=2^2\times5\times7^2$이고 2^2, 5, 7^2은 모두 표준분해식가운데 있으므로 최대인 3자리수 약수는 980입니다.

련습 20

1. 련이어 곱한 적 $975\times935\times972\times(\quad)$의 마지막 4자리수가 모두 0이 되게 하려면 괄호(　)안에 최소로 어떤 자연수를 써넣어야 합니까?

2. 어떤 학급의 학생(약 50명)이 교원의 지도밑에 나무를 심습니다. 학생들을 인원수가 꼭 같은 3개 조로 가르려고 합니다. 만일 교원과 학생이 심는 나무대수가 꼭 같다면 모두 884대를 심은것으로 됩니다. 매 사람이 몇대씩 심겠습니까?

3. 자연수 1,111,155,555는 련이어 있는 두 홀수의 적입니다. 이 련이어 있는 두 홀수의 합은 얼마입니까?

4. 몇척의 배로 70명의 학생들을 실어 강을 건너가려합니다. 매 배가 태울수 있는 인원수는 꼭 같습니다. 그리고 매 배에는 적어도 2명은 탈수 있습니다. 매번 몇척의 배가 있어야 하고 매 배에 몇명씩 태워야 합니까?

5. 어떤 수는 5개의 2, 3개의 3, 2개의 5, 1개의 7을 련

이어 곱한 적입니다. 이 수는 여러개의 2자리수 약수를 가집니다. 이 2자리수중에서 최대인 2자리수(한계)는 얼마입니까?

답 및 풀기방향

1. 20, 2. 17, 3. 66,668

4. 7척, 10명; 10척, 7명; 5척, 14명; 14척, 5명; 2척, 35명; 35척, 2명

5. 96

제21절. 수의 말끔나누기특성

만일 어떤 자연수의 하나자리수가 0, 2, 4, 6, 8이면 이 자연수는 반드시 2로 말끔히 나누어지고 어떤 자연수의 하나자리수가 0, 5이면 이 자연수는 반드시 5로 말끔히 나누어지며 어떤 자연수의 매 자리의 수합이 3의 배수이면 이 자연수는 3으로 말끔히 나누어집니다. 이런것을 수의 말끔나누기특성이라고 합니다.

수의 이와 같은 특성에 의하여 92와 56은 모두 2로 말끔히 나누어지고 92와 56의 합(148), 차(36)도 2로 말끔히 나누어진다는것을 알수 있습니다. 이밖에 56=7×8이고 2는 8을 말끔히 나누고 2는 8과 7을 곱한적 56도 말끔히 나눕니다. 또 2, 3, 4는 12를 말끔히 나누므로 서로 소인 두 수 2, 3을 곱한 적 6도 12를 말끔히 나눕니다. 그러나 서로 소가 아닌 두 수 2, 4를 곱한 적 8은 12를 말끔히 나누지 못합니다. 이상과 같은 구체적인 실례를 일반화하여 다음과 같은 수의 말끔나누기에 대한 중요한 성질을 지적할수 있습니다.

성질 1. 만일 수 a,b가 모두 c로 말끔히 나누어지면 $(a+b)$와 $(a-b)$도 c로 말끔히 나누어집니다.

성질 2. 만일 a가 b로 말끔히 나누어지고 c가 옹근수이면 적 ac도 b로 말끔히 나누어집니다.

성질 3. 만일 a가 b로 말끔히 나누어지고 수 b가 또 c로 말끔히 나누어지면 a도 c로 말끔히 나누어집니다.

성질 4. 만일 수 a가 동시에 b, c로 말끔히 나누어지고 수 b, c가 서로 소이면 수 a는 반드시 적 bc로 말끔히 나누어집니다.

실례 1. □안에 적당한 수를 써넣어 6자리수 43217□이 4로 말끔히 나누어지게 하십시오.

따져보기 6자리수 43217□의 하나자리수가 몇인지 모릅니다. 먼저 그것이 x라고 가정합니다. 이때 6자리수 43217□=432100+$\overline{7x}$(여기서 $\overline{7x}$는 열의 자리수자가 7이고 하나자리수가 x인 두 자리수를 표시합니다)이고 4,321×100, 100=4×25이므로 4와 25는 다같이 100을 말끔히 나눕니다. 말끔나누기의 성질에 의하여 432,100도 4와 25로 말끔히 나누어집니다. 만일 6자리수 43217x가 4(또는 25)로 말끔히 나누어진다면 $\overline{7x}$도 반드시 4(또는 25)로 말끔히 나누어져야 합니다. 거꾸로 만일 $\overline{7x}$가 4(또는 25)로 말끔히 나누어진다면 6자리수 43217x도 4(또는 25)로 말끔히 나누어져야 합니다.

$\overline{7x}$가 4로 말끔히 나누어지기 위해서는 x가 2와 6이 되여야 합니다.

$\overline{7x}$가 25로 말끔히 나누어지기 위해서는 x가 5여야 합니다.

풀기 72, 76은 모두 4의 배수이므로 6자리수 43217$\boxed{2}$, 43217$\boxed{6}$은 4로 말끔히 나누어질수 있습니다.

75는 5의 배수이므로 6자리수 43217$\boxed{5}$는 25로 말끔히 나누어질수 있습니다.

[설명] 이 실례를 통하여 어떤 수를 4(또는 25)로 말끔히 나눌 때의 특성을 알수 있습니다. 즉 《어떤 자연수의 마지막 두자리수가 4(또는 25)로 말끔히 나누어지면 이 자연수는 4(또는 25)로 말끔히 나누어집니다.》

실례 2. □안에 알맞는 수를 써넣어 7자리수 4786□7□이 8(또는 125)로 말끔히 나누어지게 하십시오.

따져보기 실례 1에서와 마찬가지로 7자리수를 4786□7□의 백의 자리수와 하나자리수를 각각 x, y이라고 하면 7자리수 4786□7□=4,786,000$+\overline{x7y}$(여기서 $\overline{x7y}$는 백의 자리수가 x이고 열의 자리수가 7이며 하나자리수가 y라는것을 표시합니다)입니다. 4,786,000=4,786×1,000, 1,000=8×125이므로 8과 125는 모두 1,000을 말끔히 나누며 말끔나누기성질에 의하여 8, 125는 모두 4,786,000을 말끔히 나눕니다. 만일 7자리수 4,786,x7y가 8(또는 125)로 말끔히 나누어진다면 $\overline{x7y}$도 8(또는 125)로 말끔히 나누어집니다. 거꾸로 만일 $\overline{x7y}$가 8(또는 125)로 말끔히 나누어진다면 7자리수 4,786,x7y도 반드시 8(125)로 말끔히 나누어져야 합니다.

$\overline{x7y}$가 125로 말끔히 나누어지려면 $\overline{x7y}$는 반드시 125의 배수로 되여야 하며 125의 배수는 000, 125, 250, 375, 500, 625, 850, 975의 8가지 경우가 있을수 있습니다. 이 8가지 경우에서 275, 975만이 문제의 조건을 만족시킵니다.

$\overline{x7y}$가 8의 배수일 때 이 3자리수는 000, 008, 016, 024, 032, 040, …, 104, 112, …, 176, 184, 192, …, 376, …, 472, …, 576, …, 672, …, 776, …, 872, …, 976, 984, 992의 125가지 경우일수 있습니다. 072, 176, 272, 376, 472, 576, 672, 776, 872, 976의 10가지 경우만이 문제의 조건을 만족시킵니다.

풀기 375, 975는 125의 배수이므로 4,786,[3]7[5]와 4,786,[9]7[5]는 125로 말끔히 나누어집니다.

072, 176, 272, 376, 472, 576, 672, 776, 872, 976은 8의 배수이므로 7자리수 4786[0]72, 4786[1]76, 4786[2]7[2], 4786[3]7[6],

4786$\boxed{4}$72, 4786$\boxed{5}$76, 4786$\boxed{6}$7$\boxed{2}$, 4786$\boxed{7}$7$\boxed{6}$, 4786$\boxed{8}$7$\boxed{2}$, 4786$\boxed{9}$7$\boxed{6}$은 8로 말끔히 나누어집니다.

[설명] 이 실례를 통하여 8(또는 125)로 말끔히 나누어지는 수의 특성을 다음과 같이 말할수 있습니다. 《만일 어떤 자연수의 마지막 3자리수가 8(또는 125)로 말끔히 나누어진다면 이 자연수는 8(또는 125)로 말끔히 나누어지며 그렇지 않으면 8(125)로 말끔히 나누어질수 없습니다.》

실례 3. □안에 적당한 수를 써넣어 5자리수 4□32□이 9로 말끔히 나누어지게 하십시오.

따져보기 실례 2와 마찬가지로 5자리수 4□32□의 천의 자리수와 하나자리수를 각각 x, y라고 하면 5자리수

$$\begin{aligned}4\square,32\square &= 40{,}000+1{,}000x+300+20+y\\ &= 4\times(9{,}999+1)+x\times(999+1)+3\times(99+1)+2\times(9+1)+y\\ &= 4\times9{,}999+999x+3\times99+2\times9+4+x+3+2+y\\ &= 9\times(1{,}111\times4+1{,}11x+3\times11+2)+(4+x+3+2+y)\end{aligned}$$

가 됩니다.

x가 어떤 수인가에 관계없이 9는 반드시 $9\times(1{,}111\times4+1{,}11x+3\times11+2)$를 말끔히 나눕니다. 만일 5자리수 $4x{,}32y$가 9로 말끔히 나누어진다면 $(4+x+3+2+y)$도 반드시 9로 말끔히 나누어져야 합니다. 거꾸로 만일 $(4+x+3+2+y)$가 9로 말끔히 나누어진다면 5자리수 $4x{,}32y$도 반드시 9로 말끔히 나누어져야 합니다.

$(4+x+3+2+y)$가 9로 말끔히 나누어지기 위해서는 이 합이 9, 18, 27의 3가지 경우여야 합니다.

$4+x+3+2+y=9$일 때 $x=y=0$이 됩니다.

$4+x+3+2+y=18$일 때 $x+y=9$이며 이때 $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$이고 대응하는 y는 $y=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$입니다.

$4+x+3+2+y=27$일 때 $x=y=9$가 됩니다.

풀기 9는 9의 배수이므로 5자리수 4$\boxed{0}$32$\boxed{0}$은 9로 말끔히 나누어질수 있습니다. 18은 9의 배수이므로 5자리수 4$\boxed{0}$32$\boxed{9}$, 4$\boxed{1}$32$\boxed{8}$, 4$\boxed{2}$32$\boxed{7}$, 4$\boxed{3}$32$\boxed{6}$, 4$\boxed{4}$32$\boxed{5}$, 4$\boxed{5}$32$\boxed{4}$,

4[6]32[3], 4[7]32[2], 4[8]32[1], 4[9]32[0]은 모두 9로 말끔히 나누어집니다.

27은 9의 배수이므로 4[9],32[9]는 9로 말끔히 나누어집니다.

4, x, 3, 2, y는 5자리수 4x,32y의 매 자리수이므로 자연수가 9로 말끔히 나누어지기 위한 다음과 같은 특성을 말할수 있습니다.

《만일 어떤 자연수의 매 자리수합이 9로 말끔히 나누어지면 이 자연수도 9로 말끔히 나누어지고 그렇지 않으면 9로 말끔히 나누어지지 않습니다.》

실례 4. □안에 적당한 수를 써넣어 7자리수 □,199,2□□가 동시에 8, 9, 25로 말끔히 나누어지게 하십시오.

따져보기 문제의 조건에 의하면 7자리수 □,199,2□□가 동시에 8, 9, 25로 말끔히 나누어져야 하므로 먼저 25로 말끔히 나누어져야 할 조건을 생각해야 합니다. 7자리수 □,199,2□□가 25로 말끔히 나누어질 때 그것의 마지막 두자리수가 만드는 수는 00, 25, 50, 75 뿐이여야 하고 두번째 조건 즉 □,199,2□□가 8로 말끔히 나누어질 조건을 생각해야 합니다. 7자리수 □,199,2□□가 8로 말끔히 나누어질 때 그것의 마지막 3자리우의 수자가 만드는 수는 반드시 8의 배수여야 합니다. 그런데 200, 225, 270, 275의 4개 수중에서 200만이 8의 배수입니다. 그러므로 7자리수 □,199,2□□의 열의 자리와 하나자리 □안에 0만 써넣어야 합니다. 마지막에 세번째 조건인 9로 말끔히 나누어져야 할 조건을 생각해야 합니다. □,199,2□□가 9로 말끔히 나누어지기 위해서는 그것의 매 자리우의 수합이 반드시 9의 배수여야 하고 1+9+9+2+0+0=21이므로 7자리수의 백만자리 □안에 6만을 써넣어야 합니다. 이렇게 하면 문제가 풀릴수 있습니다.

풀기 200은 25의 배수이고 또 8의 배수이므로 7자리수 □,199,2□□의 열의 자리와 하나자리의 □안에 0을 써넣어

야 합니다.

또 1+9+9+2+0+0=21이고 21+6=27이며 27은 9의 배수이므로 7자리수 □,199,2[0] [0]의 백만자리의 □안에 6만을 써넣어야 합니다.

[6],199,2[0] [0]는 동시에 8, 9, 25로 말끔히 나누어집니다.

실례 3을 풀 때 조건을 하나씩 갈라서 생각한 다음 렬거법(있을수 있는 경우를 다 찾아 라렬하는 방법)과 채치기방법을 써서 조건에 맞는 답을 찾았습니다. 이 문제를 또 다음과 같이 생각할수 있습니다. 8과 25가 서로 소이고 7자리수 □,199,2□□가 동시에 8과 25로 말끔히 나누어질 때 말끔히 나누어지기성질에 의하면 7자리수 □,199,2□□는 반드시 (8×25=)200으로 말끔히 나누어집니다. 그리고 □,199,2□□=□,199×1,000+2□□이고 200이 □,199×1,000을 말끔히 나누므로 200은 2□□을 말끔히 나누어야 합니다. 이렇게 하여 2□□의 열의 자리와 하나자리 □안에 0만을 써넣으면 됩니다.

이 문제를 다른 방법으로 풀수 없겠는가를 생각해보십시오.

실례 5. 1~1,997의 1,997개의 자연수를 작은 수부터 큰 수의 순서로써 여러자리수 즉 123456789011…19941995 19961997을 만듭니다. 이 여러자리수를 9로 나누었을 때의 나머지를 구하십시오.

따져보기 앞에서 본 9로 말끔히 나누기특성으로부터 어떤 자연수를 9로 나누었을 때의 나머지는 이 자연수의 매 자리수의 합을 9로 나누었을 때의 나머지와 같다는것을 알수 있습니다. 이 문제에서 요구한 여러자리수를 9로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제를 1~1,997의 1,997개의 자연수의 합이 모두 몇개인가 하는 문제로 넘길수 있습니다. 이 문제의 풀이법은 여러가지일수 있습니다. 이제 그중에서 간단한 한가지 방법을 봅시다.

0~1,999인 2,000개의 옹근수를 다음과 같이 1,000개의 조로 가릅니다.

(0, 1,999), (1, 1,998), (2, 1,997), (3, 1996), (4, 1,995), ⋯ (996, 1,003), (997, 1,002), (998, 1,001), (999, 1,000)

이 매 조에 있는 두 수의 합은 모두 1,999이고 매 조의 두수를 더했을 때 매 수자리에서의 자리올림은 없습니다. 이렇게 하여 1~999의 1,999개의 자연수의 모든 수자리우의 수의 합은 (1+9+9+9)×1,000=28,000이 됩니다.

두 수 1,998, 1,999의 모든 수자리의 수합은 9×5+1×2+8=55이므로 1부터 1,997까지의 1,997개 자연수의 수자리우의 수합은

$$28,000-55=27,945$$

입니다. 이 합을 리용하여 쉽게 답을 구할수 있습니다.

풀기 1~1,997의 1,997개의 자연수의 모든 자리우의 수합은 27,945이고 27,945를 9로 나누면 나머지가 0이 되므로 여러자리수 1234567891011⋯199519961997을 9로 나누면 나머지가 0이 됩니다.

[설명] 이 문제에서 분류하여 푸는 방법을 쓸수 있습니다. 1~1,997의 1,997개의 자연수를 몇개 토막으로 가른 다음 매 토막가운데있는 모든 자연수의 수자리의 수합을 계산하여 풀수 있습니다. 자체로 풀어보십시오.

이 문제를 또 다른 방법으로 풀수도 있습니다. 차례로 쓴 련이어 있는 임의의 9개의 자연수로 된 여러자리수는 9로 반드시 말끔히 나누어지기때문입니다. 1부터 1,997까지 모두 1,997개의 자연수가 있고 1,997÷9=211⋯8이고 1,997, 1,996, 1,995, 1,994, 1,993, 1,992, 1,991, 1,990의 8개 수의 모든 수자리우의 수합은 $9\times16+1\times8+\frac{(1+7)\times7}{2}=180$, 180÷9=20⋯0입니다. 이것은 우의 여러자리수를 9로 나눈 나머지는 0이라는것을 보여줍니다. 이것은 앞에서 구한 결과와 일치합니다.

차례로 쓴 련이어 있는 9개의 자연수로 된 여러자리수가 9로 말끔히 나누어지는것은 무엇때문입니까? 이것은 련이어 있는 임의의 9개 자연수의 매개 수자리의 수자합

을 9로 나누었을 때의 나머지는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 9개 수이며 이 9개 수의 합은 36이고 36은 9로 말끔히 나누어지므로 차례로 쓴 련이어 있는 9개 수로 된 여러자리수는 9로 반드시 말끔히 나누어집니다.

실례 6. 1, 2, 3, …, 29, 30의 30개 수를 왼쪽으로부터 오른쪽의 순서로 차례로 배렬하여 51자리의 수 123456…2930을 만듭니다. 이 51자리의 수를 11로 나누었을 때의 나머지를 구하십시오.

따져보기 이 문제를 풀려면 어떤 자연수가 11로 말끔히 나누어질 때의 특성을 알아야 합니다.이제 다음과 같은 문제를 봅시다.

$$4,239,235=4,000,000+200,000+30,000+9,000+200+30+5$$
$$=4\times(999,999+1)+2\times(100,000+1-1)+3\times(9,999+1)+9\times(1,000+1-1)+2\times(99+1)+3(10+1-1)+5$$
$$=(4\times999,999+4)+2\times(99,990+11-1)+3\times9,999+3+9\times(990+11-1)+2\times99+2+3\times(11-1)+5$$
$$=(4\times999,999+2\times99,990+22+3\times9,999+9\times990+9\times11+2\times99+3\times11)+(4+3+2+5)-(2+9+3)$$

웃식의 첫번째 괄호안의 매 수는 모두 11로 말끔히 나누어지므로 그것들의 합도 11로 말끔히 나누어집니다. 4,239,235가 11로 말끔히 나누어지면 (4+3+2+5)－(2+9+3)도 11로 말끔히 나누어집니다. 거꾸로 (4+3+2+5)－(2+9+3)이 11로 말끔히 나누어지면 4,239,235도 11로 말끔히 나누어집니다. 웃식의 두번째 괄호안의 매 수는 4,239,235의 홀수자리우의 4개 수이고 세번째 괄호안의 매 수는 4,239,235의 짝수자리우의 3개 수입니다. 이로부터 어떤 수가 11로 말끔히 나누어지기 위한 특성을 다음과 같이 말할수 있습니다.

만일 어떤 자연수의 홀수자리우의 수자합과 짝수자리의 수자합의 차가 11로 말끔히 나누어진다면 이 자연수는 11로 말끔히 나누어집니다. 그렇지 않는 경우 이 자연수는 11로 말끔히 나누어지지 않습니다.

어떤 수가 11로 말끔히 나누어지기 위해서는 자연수의 마지막 3자리수가 표시하는 수와 마지막 3자리앞에 있는 수가 표시하는 수와의 차가 11(또는 7 또는 8)로 말끔히 나누어지면 이 자연수는 11(7 또는 13)로 말끔히 나누어집니다.

이제 이런 특성에 의하여 주어진 문제를 풀어봅시다.

51자리수 123456…282930의 홀수번째 자리의 수는 차례로 각각 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 9, 7, 5, 3, 1이며 이 수들의 합은 $(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 2+1+3+5+7+9=115$이며 이 수의 짝수번째 자리우의 수는 차례로 3, 2, 2, …, 2, 1, 1, …, 1, 8, 6, 4, 2이며 이 수들의 합은 $2\times 10+1\times 10+3+8+6+4+2=53$입니다.

$$115-53=62,\ 62\div 11=5\cdots 7$$

입니다. 즉 이 51자리의 수를 11로 나눈 나머지는 7입니다.

이 문제에서 홀수번째 자리의 수합은 짝수번째 자리의 수합보다 크므로 계산하기가 비교적 편리합니다. 만일 18자리의 수 919,293,949,596,979,899를 11로 나누면 나머지가 얼마입니까?

이 18자리의 홀수번째 자리의 수합은 45(=9+8+7+6+5++4+3+2+1)이며 짝수번째 자리의 수합은 $81(=9\times 9)$입니다. 짝수번째 자리의 수합은 홀수번째 자리의 수합보다 크며 $81-45=36$, $36\div 11=3\cdots 3$입니다. 어떻게 계산하여야 합니까? 이 18자리의 수를 11로 나눈 나머지는 8이고 3이 아닙니다.

실례 7. 1－9의 9개 수를 그림 21－1과 같이 원형으로 배렬하였습니다. 어떤 2개 수사이를 잘라서 각각 시계바늘이 도는 방향과 시계바늘이 도는 반대방향으로 가면서 2개의 9자리수를 만듭니다(실례를 들면 1과 7사이를 잘라서 2개의 9자리수 193,426,857과 758,624,391을 얻습니

1
7 9
5 3
8 4
6 2

그림 21 － 1

다). 만일 자른 다음에 얻어지는 두개의 9자리수의 차가 396으로 말끔히 나누어진다면 자른 경계의 왼쪽과 오른쪽에 있는 두 수의 적은 얼마입니까?

따져보기 $396=4\times9\times11$이고 4, 9, 11은 둘씩 서로 소이므로 앞에서 지적한 말끔나누기의 성질에 의하여 396으로 말끔나누기를 각각 4, 9, 11로 말끔나누기로 넘겨 생각할수 있습니다.

만일 어떤 자연수의 매 수자리의 수합이 9의 배수이면 이 자연수는 반드시 9로 말끔히 나누어진다는것을 앞에서 지적하였습니다. 지금 어느 두 수사이를 경계로 하여 잘라놓았는가에 관계없이 시계바늘이 도는 방향 또는 시계바늘이 도는 반대방향에 따라 만든 두개의 9자리수의 매 수자리우의 수합은 모두 1부터 9개 수의 합 45이며 45는 9로 말끔히 나누어집니다. 따라서 이 2개의 9자리수도 반드시 9로 말끔히 나누어져야 합니다. 그러므로 이 2개의 9자리수의 차도 9로 물론 말끔히 나누어집니다.

다시 11로 나누는 경우를 생각해봅시다. 어떤 수가 11로 말끔히 나누어지는가를 생각하려면 이 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차를 11로 나누었을 때의 나머지를 생각하면 됩니다. 어느 두 수사이를 경계로 하여 잘라놓았는가에 관계없이 2개의 9자리수의 수순서는 서로 반대이므로 이 두 9자리수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 꼭 같습니다. 바꾸어 말하면 이 2개의 9자리수를 11로 나눈 나머지는 같습니다. 따라서 그것들의 차도 반드시 11로 말끔히 나누어집니다.

마지막으로 이 2개의 9자리수의 차가 4로 말끔히 나누어지겠는가를 봅시다. 어떤 자연수가 4로 말끔히 나누어지기 위한 특성으로부터 이 2개의 9자리수의 마지막 두자리수들의 차가 4로 말끔히 나누어지면 이 2개의 9자리수의 차도 반드시 4로 말끔히 나누어진다는것을 알수 있습니다.

이상과 같은 따져보기로부터 알수 있는바와 같이 두 수사이를 잘라서 만든 2개의 9자리수의 차가 396으로 말

끔히 나누어지겠는가를 생각하는 대신 경계선의 왼쪽에 있는 2개 수로 된 두자리수와 오른쪽에 있는 2개 수로 된 두 자리수와의 차가 4로 말끔히 나누어지겠는가를 생각하면 됩니다. 이 두수의 차가 4로 말끔히 나누어지면 2개의 9자리수의 차는 396으로 말끔히 나누어지며 그렇지 않으면 396으로 말끔히 나누어지지 않습니다.

풀기 1과 9사이를 가르면 71－39=32, 32는 4로 말끔히 나누어집니다.

9와 3사이를 가르면 43－19=24, 24는 4로 말끔히 나누어집니다.

3과 4사이를 가르면 93－24=69, 69는 4로 말끔히 나누어지지 않습니다.

4와 2사이를 가르면 62－34=28, 28은 4로 말끔히 나누어집니다.

2와 6사이를 가르면 86－42=44, 44는 4로 말끔히 나누어집니다.

6과 8사이를 가르면 58－26=32, 32는 4로 말끔히 나누어집니다.

8과 5사이를 가르면 75－68=7, 7은 4로 말끔히 나누어지지 않습니다.

5와 7사이를 가르면 85－17=68, 68은 4로 말끔히 나누어집니다.

7과 1사이를 가르면 91－57=34, 34는 4로 말끔히 나누어지지 않습니다.

그러므로 이 문제에는 다음과 같은 6개의 답이 있습니다.

1×9=9, 9×3=27, 4×2=8, 2×6=12, 6×8=48, 5×7=35

실례 8. 자연수 1, 2, 3, …을 차례로 써서 한개의 여러자리수 123456789101112…를 만듭니다. 만일 어떤 자연수까지 썼을 때 만들어지는 여러자리수가 72로 말끔히 나누어진다면 이 자연수는 얼마이겠습니까?

따져보기 72=8×9이고 8과 9는 서로 소입니다. 72로

말끔히 나누어지려면 8과 9로 동시에 말끔히 나누어져야 합니다. 8로 말끔히 나누어지려면 반드시 4로 말끔히 나누어져야 합니다. 그러므로 먼저 4로 말끔히 나누어지는 경우를 생각해야 합니다.

어떤 수가 4로 말끔히 나누어지려면 이 수의 마지막 두자리수로 된 수가 반드시 4로 말끔히 나누어져야 합니다. 4로 말끔히 나누어지는 수를 왼쪽으로부터 오른쪽으로 가면서 마지막 두자리수를 보면 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …이 됩니다.

만일 12이면 12의 매 자리의 수합이 3이 됩니다. 3은 9로 말끔히 나누어지지 않으므로 문제의 조건을 만족시키지 못합니다.

이제 123,456을 봅시다. 123,456의 매 수의 자리의 수합은 21인데 21은 9로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 문제의 조건을 만족시키지 못합니다.

1234…101112를 봅시다. 이 수의 매 자리의 수합은 51이며 51은 9로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 역시 문제의 조건을 만족시키지 못합니다.

자연수를 16, 24, 32까지 썼을 때 대응하는 마지막 3자리수로 된 수는 516, 324, 132가 되는데 이 3개 수는 모두 8로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 이와 같이 얻은 여러자리수도 72로 말끔히 나누어지지 않습니다.

써내려간 마지막수가 20이면 이때 마지막 3자리수는 920이며 920은 8로 말끔히 나누어집니다. 그런데 여러자리수 123456…181920의 매 자리의 수합은 $(1+2+\cdots+9)\times 2+1\times 10+2=102$가 됩니다. 102는 9로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 20까지 썼을 때 얻어지는 여러자리수도 문제의 요구를 만족시키지 못합니다.

만일 써내려간 마지막 수가 28이면 이때 마지막 3자리수는 728이며 728은 8로 말끔히 나누어집니다. 그런데 여러자리수 1234…2728의 매 자리의 수합은 $(1+2+\cdots+9)\times 3+1\times 10+2\times 9-9=154$이며 154는 9로 말끔히 나누어지지

않습니다. 그러므로 28까지 썼을 때 얻어지는 여러자리수도 문제의 요구를 만족시키지 못합니다.

마지막수가 27까지 되게 썼다면 이때 마지막 3자리수는 627이 됩니다. 여러자리수 1234…2627의 매 자리의 수합은 $(1+2+\cdots+9)\times2+1\times10+2\times8+(1+2+3+4+5+6+7)=144$이며 144는 9로 말끔히 나누어집니다. 그러므로 27까지 썼을 때 생기는 여러자리수가 처음으로 72로 말끔히 나누어집니다.

풀기 27까지 썼을 때 얻어지는 여러자리수 1234…2627은 처음으로 72로 말끔히 나누어집니다.

실례 9. □안에 알맞는 수를 써넣어 6자리수 □19,97□이 66으로 말끔히 나누어지게 하십시오.

따져보기 $66=2\times3\times11$이므로 6자리수 □19,97□이 각각 2, 3, 11로 말끔히 나누어지면 이 수는 반드시 66으로 말끔히 나누어집니다. 이제 x, y로써 6자리수 □19,97□중의 십만자리와 하나자리의 □안의 수를 대신합시다.

6자리수 $x19,97y$가 2로 말끔히 나누어질 때 y는 0, 2, 4, 6, 8을 취할수 있습니다.

$y=0$일 때 6자리수 $x19,970$이 3으로 말끔히 나누어지기 위해서는 x가 1, 4, 7만을 취할수 있습니다. 이제 119,970, 419,970, 719,970의 3개 수가 11로 말끔히 나누어지는가를 봅시다. 이 3개 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 각각 7, 10, 13이며 그것들은 모두 11로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 $y=0$일 때 이 문제는 풀이를 가지지 않습니다.

$y=2$일 때 6자리수 $x19,972$가 3으로 말끔히 나누어지기 위해서는 x가 2, 5, 8만을 취해야 합니다. 219,972, 519,972, 819,972의 3개수가 11로 말끔히 나누어지겠는가를 봅시다. 이 3개 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 각각 6, 9, 12이며 그것들은 모두 11로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 $y=2$일 때 이 문제는 풀이를 가지지 않습니다.

$y=4$일 때 6자리수 $x19,974$가 3으로 말끔히 나누어지기

위해서는 x가 3, 6, 9만을 가질수 있습니다. 이제 319,974, 619,974, 919,974의 3개 수가 11로 말끔히 나누어지는가를 봅시다. 이 3개 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 각각 5, 8, 11입니다. 여기서 11만이 11로 말끔히 나누어집니다. 그러므로 919,974는 66으로 말끔히 나누어집니다.

y=6일 때 6자리수 x19,976이 3으로 말끔히 나누어지기 위하여서는 x가 1, 4, 7만을 가질수 있습니다. 이제 119,976, 419,976, 719,976의 3개 수가 11로 말끔히 나누어지는가를 봅시다. 이 3개 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 각각 1, 4, 7이며 그것들은 모두 11로 말끔히 나누어지지 않습니다. 그러므로 y=6일 때 이 문제의 풀이는 없습니다.

y=8일 때 6자리수 x19,978이 3으로 말끔히 나누어지기 위해서는 x가 2, 5, 8만을 취할수 있습니다. 이제 219,978, 519,978, 819,978의 3개 수가 11로 말끔히 나누어지는가를 봅시다. 이 3개 수의 홀수번째 자리의 수합과 짝수번째 자리의 수합의 차는 각각 0, 3, 6입니다. 0만이 11로 말끔히 나누어집니다. 그러므로 219,978은 66으로 말끔히 나누어집니다.

풀기 $\boxed{9}$19,97$\boxed{4}$, $\boxed{2}$19,97$\boxed{8}$의 두수가 66으로 말끔히 나누어집니다.

련습 21

1. 어떤 6자리수 586□□□이 3, 4, 5로 동시에 말끔히 나누어집니다. 이와 같은 6자리수중에서 가장 작은 한개 수를 구하십시오.

2. □안에 적당한 수를 써넣어 □679□이 8, 9로 동시에 말끔히 나누어지게 하십시오.

3. 1부터 1,001까지의 매수를 다음과 같이 배렬하여 표를 만듭니다. 표에 표시한것처럼 그중의 9개 수를 직4각형

의 테두리안에 넣어 이 9개 수의 합이 (1) 1,986 (2) 2,529 (3) 1,989가 되게 할수 있습니까? 만일 그렇게 할수 있다면 직4각형의 테두리안에 최대수와 최소수를 써넣으십시오. 만일 그렇게 할수 없다면 그 리유를 설명하십시오.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
… …	… …	… …	… …	… …	… …	…
995	996	997	998	999	1,000	1,001

4. 12부터 2,000까지의 1,989개의 자연수를 차례로 써서 여러자리수 1213141516…199819992000을 얻습니다. 이 여러자리수를 9로 나누었을 때의 나머지를 구하십시오.

5. 자연수 10, 11, …, 50을 왼쪽으로부터 차례로 배렬하여 여러자리수 101112…4950을 만듭니다. 이 여러자리수를 11로 나누었을 때의 나머지를 구하십시오.

6. □안에 적당한 수자를 써넣어 6자리수 19□,88□이 35로 말끔히 나누어지게 하십시오.

7. 6자리수 x19,91y가 33으로 말끔히 나누어진다면 이 6자리수는 얼마입니까?

8. 0부터 9까지의 서로 다른 10개의 수로 여러개의 열의 자리수를 만들수 있습니다. 이 많은 열의 자리수중에서 11로 말끔히 나누어지는 최대 열의자리수는 얼마입니까? (매 수는 한번만 쓸수 있습니다.)

답 및 풀기방향

1. 586,[0][2][0]

구하려는 6자리수를 $\overline{586xyz}$이라고 합시다. $\overline{586xyz}$는 4, 5로 동시에 말끔히 나누어지므로 z=0, y=2, 4, 6, 8, 0입니다.

y=0일 때 6자리수는 $\overline{586x00}$입니다. 3은 $\overline{586,x00}$을 말끔히 나누므로 5+8+6+x=19+x는 3의 배수입니다. 즉 x=2, 5,

8입니다.

y=2일 때 6자리수는 $\overline{586,x20}$입니다. 3은 $\overline{586,x20}$을 말끔히 나누므로 5+8+6+x+2=21+x는 3의 배수입니다. 즉 x는 0, 3, 6입니다.

대비하면 최소 6자리수는 586,020입니다.

2. $\boxed{3}$6,79$\boxed{2}$

구하려는 5자리수를 x6,79y라고 하면 8은 $\overline{x6,79y}$를 말끔히 나누므로 y=2입니다. 또 9가 $\overline{x6,792}$를 말끔히 나누므로 x+6+7+9+2=x+24는 9의 배수입니다. 그러므로 x=3입니다. 그러므로 구하려는 5자리수는 36,792입니다.

3. ⑴ 그렇게 할수 없습니다. ⑵ 그렇게 할수 없습니다. ⑶ 가능합니다. 최소수는 213이고 최대수는 229입니다.

직4각형의 테두리안에 있는 중간의 한수를 x이라고 하면 테두리안에 있는 9개 수의 합은 (x−8)+(x−7)+(x−6)+(x−1)+x+(x+1)+(x+6)+(x+7) +(x+8)=9x가 됩니다.

⑴ 9가 1,986을 말끔히 나눌수 없으므로 불가능합니다.

⑵ 9가 물론 2,529를 말끔히 나누기는 하지만 2,529÷9=281, 281÷8=35⋯1이고 281은 제1렬에 있습니다. 그러므로 불가능합니다.

⑶ 1,989÷9=221, 221÷8=27⋯5이고 221은 제5렬에 속해있으므로 가능합니다. 최소수는 (221−8=)213이고 최대수는 (221+8=)229입니다.

4. 0

12부터 2,000까지사이에 1,989개의 자연수가 있고 1,989÷9=221이므로 여러자리수 121314⋯199819992000를 9로 나누면 나머지가 0이 됩니다.

5. 9

여러자리수의 홀수번째 자리의 수합은

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times4+0=180$$

이고 여러자리수의 짝수번째 자리의 수합은

$$(1+2+3+4)\times10+5=105$$

이고 $180-105=75$, $75\div11=6\cdots9$이므로 여러자리수를 11로 나눈 나머지는 9입니다.

6. $19\boxed{4},88\boxed{0}$, $19\boxed{2},88\boxed{5}$, $19\boxed{9},88\boxed{5}$

7. 219,912, 519,915, 819,918

$$\overline{x19,91y}=1,000,00x+19,910+y$$
$$=(33\times3,030+10)x+33\times603+11+y$$
$$=33\times(30,30x+603)+10x+11+y$$

입니다. 33이 $\overline{x19,91y}$를 말끔히 나눌 때 33은 $10x+11+y$를 말끔히 나눕니다. 거꾸로 성립합니다. x, y가 수이므로 $21\leq10x+11+y\leq110$이고 21과 110사이에 33의 배수로는 33, 66, 99의 3개 수가 있습니다.

$10x+11+y=33$일 때 $10x+y=22$이므로 $x=y=2$입니다.

$10x+11+y=66$일 때 $10x+y=55$이므로 $x=y=5$입니다.

$10x+11+y=99$일 때 $10x+y=88$이므로 $x=y=8$입니다.

구하려는 6자리수는 219,912, 519,915, 819,918입니다.

8. 9,876,524,130

구하려는것이 최대인 열의 자리수이므로 앞의 몇개 수자는 98,765입니다. 11로 말끔히 나누어진다는 이 조건을 다시 생각합시다. 열의 자리수를 $\overline{9,876,5ab,cde}$라고 하면 $(e+c+a+6+8)-(d+b+5+7+9)=14+a+c+e-21-d-b$가 11의 배수여야 합니다. 조건에 의하여 실험계산을 해보면 최대 열의자리수는 9,876,524,130이라는것을 알수 있습니다.

제22절. 최대공통약수와 최소공통배수

만일 어떤 자연수 a가 자연수 b로 말끔히 나누어지면 a를 b의 배수라고 부르고 b를 a의 약수라고 부릅니다. 몇개의 자연수에 공통인 약수를 이 자연수의 공통약수(공약수)라고 부르고 공통약수중에서 최대인 한개의 공통약수를 이 몇개 자연수의 최대공통약수(최대공약수)라고 부릅

니다. 일반적으로 a, b의 최대공통약수를 부호(a, b)로 표시합니다. 실례를 들면 (8, 12)=4, (4, 6, 10)=2입니다. 일상적으로 쓰는 최대공통약수를 구하는 방법은 씨인수분해와 짧은 나누기법입니다. 몇개 수에 공통인 배수를 이 몇개 수의 공통배수라고 부릅니다. 공통배수중에서 0을 제외한 최소인 공통배수를 이 몇개 수의 최소공통배수(최소공배수)라고 부릅니다. a, b의 최소공통배수를 $[a, b]$로 표시합니다. 실례를 들면 [8, 12]=24, [2, 6, 5]=30입니다.

이제 최대공통약수와 최소공통배수와 관계되는 문제를 고찰합시다.

실례 1. 길이가 3.5m, 너비가 1.05m, 높이가 0.84m인 직6면체모양인 나무가 있습니다. 이 나무를 톱으로 잘라 크기가 꼭 같은 바른6면체모양의 나무쪼각을 만들려 합니다. 작은 바른6면체의 한변의 길이가 얼마일 때 나무쪼각은 될수록 적게 생기면서 작은 바른6면체의 체적이 최대로 되게 할수 있습니까? (톱질할 때 톱밥의 소모는 없는것으로 보고 직4각형나무가 톱으로 자른 다음 없어져야 합니다.)

따져보기 문제의 요구에 따라 톱으로 자른 후에 얻어지는 바른6면체모양의 나무의 한변의 길이를 a라고 가정합시다. 이제 톱으로 잘라서 얻은 작은 바른6면체를 적당히 결합하여 쌓으면 본래의 직6면체모양이 되여야 합니다. 이것은 3.57m, 1.05m, 0.84m는 모두 작은 바른6면체의 한변의 길이 a의 배수라는것을 의미합니다. 거꾸로 말하면 a는 3.57m, 1.05m, 0.84m의 공통약수입니다. 이밖에 톱으로 잘라서 만든 작은 바른6면체의 체적이 최대로 될것을 요구합니다. 이것은 작은 바른6면체의 한변의 길이 a가 최대로 될것을 요구합니다. 그러므로 a는 3.57m, 1.05m, .0.84m의 최대공통약수로 되여야 합니다.

풀기 3.57m=357cm, 1.05m=105cm, 0.84m=84cm이고

3	357	105	84
7	119	35	28
	17	5	4

이므로 a=(357, 105, 84)=3×7=21이 됩니다.

즉 작은 바른6면체의 한변의 길이가 21cm일 때 그 체적이 최대로 됩니다.

실례 2. 눈이 내린 어느날 윤미와 그의 할아버지가 다같이 걸어서 원형꽃밭의 둘레길이를 재였습니다. 그 두 사람이 재기 시작한 출발점과 가는 방향은 꼭 같습니다. 윤미는 한걸음에 54cm, 할아버지는 한걸음에 72cm씩 갑니다. 두개의 발자국이 겹쳤기때문에 제각기 한바퀴씩 돈다음 눈우에 찍힌 발자국이 60개였습니다. 이 꽃밭둘레길이는 얼마입니까?

따져보기 원형꽃밭의 둘레길이를 알려면 윤미 또는 그의 할아버지가 1바퀴 도는데 찍힌 발자국이 몇개인가를 알아야 합니다. 윤미와 그의 할아버지가 걸어서 잴 때의 시작점과 걸어가는 방향이 꼭 같고 두 사람의 발자국이 겹쳤다는것을 알고있습니다. 이것은 두 사람이 시작점에서 출발하여 처음 발자국이 겹쳤을 때까지 간 거리는 같다는것을 의미합니다. 이 거리는 윤미와 그의 할아버지가 걸어간 거리의 공통배수입니다. 또 첫번째 겹쳤으므로 이 거리는 그 두 사람의 걸음길이의 최소공통배수입니다. 또 윤미의 한걸음 길이는 54cm이고 할아버지의 한걸음의 길이는 72cm라는것이 주어졌으므로 (72, 54)를 각각 54와 72로 나누면 시작점으로부터 첫번째 발자국이 겹칠 때까지의 거리를 걷는데 몇걸음이 걸리는가를 계산할수 있습니다. 또 두 사람이 한바퀴 도는데 60개의 발자국을 남겼다는것을 알고있으므로 60을 우에서 구한 걸음개수로 나누면 한바퀴의 길이에 몇개의 (72, 54)가 있는가를 계산할수 있고 따라서 둘레의 길이가 곧 구해집니다.

풀기

$$\begin{array}{r|rr} 9 & 54 & 72 \\ \hline 2 & 6 & 8 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

(54, 72)=9×2×3×4=216(cm)

출발점으로부터 두 사람의 발자국이 처음으로 겹칠때까지 윤미가 남긴 발자국은 (216÷54=)4개이고 할아버지가 남긴 발자국은 (216÷72=)3개입니다.

그런데 두 사람의 한개발자국은 겹치므로 216cm인 구간에서 남긴 발자국수는 (4+3−1)=6개입니다.

그러므로 60÷6=10

$$216\times10=2,160(\text{cm})$$

그러므로 꽃밭의 둘레길이는 2,160cm입니다.

[설명] 실례 1과 실례 2에서 알수있는바와 같이 어떤 수가 몇개 수의 최대공통약수 또는 최소공통배수인가를 구하는것이 이 문제를 푸는 기본열쇠입니다.

실례 3. 20보다 작은 3개의 자연수를 쓰되 그것들의 최대공통약수가 1이고 그중의 임의의 두수는 모두 서로소가 안되게 하십시오.

따져보기 구하려는 3개의 자연수를 a, b, c로 표시하면 a, b, c는 다음의 조건을 만족시켜야 합니다.

a, b, c는 모두 20보다 작고 $(a, b, c)=1$, $(a, b)>1$, $(a, c)>1$, $(b, c)>1$입니다.

조건 $(a, b, c)=1$로부터 a, b, c의 3개 수는 동시에 짝수를 취할수 없다는것을 알수 있습니다.

또 조건 $(a, b)>1$, $(b, c)>1$, $(a, c)>1$로부터 a, b, c의 3개 수도 동시에 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19중의 값을 동시에 가질수 없고 a, b, c의 3개 수중의 임의의 한수는 20보다 작은 수들중에서 씨수를 가질수 없다는것을 알수 있습니다.

만일 a가 어떤 씨수값을 가진다면 $(a, b)>1$, $(a, c)>1$을 만족시키기 위해서는 b, c가 모두 a의 배수여야 합니다. 즉 $b=aq_1$, $c=aq_2$이여야 합니다. 이렇게 하여 $(a, b, c)=a>1$이 되는데 이것은 $(a, b, c)=1$에 모순됩니다.

이밖에 a, b, c의 3개 수중에서 임의의 두 수를 생각할 때 그중의 한수가 다른 한수의 배수로 될수 없습니다. 만일 a가 b의 배수이면 $(a, b)=b$이고 $(b, c)=d>1$이기 위해서는 $(a, b, c)=d>1$이 되여야 하는데 이것은 $(a, b, c)=1$에

모순됩니다.

이와 같은 따져보기를 통하여 a, b, c의 3개 수사이에 다음과 같은 두가지 가능성만 있습니다. 한가지는 짝수가 2개, 홀수가 1개인 경우이고 다른 한가지는 홀수가 2개이고 짝수가 1개인 경우입니다. 그리고 여기서 홀수는 1과 20보다 작은 홀수, 씨수가 아닙니다.

먼저 2개가 홀수이고 한개가 짝수인 경우를 따져봅시다. 20보다 작은 홀수로서는 1이 홀수, 씨수인것외에 9와 15(2개의 홀수합성수)가 있고 20보다 작은 짝수로서는 그를 제외하고 또 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18의 8개 수가 있습니다. 18은 9의 배수이고 (9, 15)=3이므로 짝수로 18을 가질수 없습니다. 또 (4, 9)=1, (8, 9)=1, (10, 9)=1, (14, 9)=1, (16, 9)=1이므로 짝수로 4, 8, 10, 14, 16을 취할수 없습니다. 이렇게 하여 남은것은 6과 12의 2개 짝수입니다. 그런데 (6, 9, 15)=3, (12, 9, 15)=3으로서 (a, b, c)=1에 모순됩니다. 그러므로 2개가 홀수이고 1개가 짝수인 경우는 있을수 없습니다.

이제 2개가 짝수이고 1개가 홀수인 경우를 따져봅시다.

우에서 지적한 따져보기로부터 홀수는 9, 15라는것을 알수 있습니다. 만일 1개 홀수가 9이면 우의 따져보기에 의하여 다른 두 짝수는 4, 8, 10, 14와 16이 될수 없으며 18은 또 9의 배수이므로 안됩니다. 이렇게 하여 6과 12만 남고 (6, 9, 12)=3이 되는데 이것은 (a, b, c)=1이라는데 모순됩니다. 그러므로 1개 홀수가 9일 때 답이 없습니다.

1개의 홀수가 15일 때 (4, 15)=1, (8, 15)=1, (14, 15)=1, (16, 15)=1이므로 짝수로 4, 8, 14, 16을 취할수 없고 6, 10, 12, 18의 4개 짝수만 남습니다. 또 18, 12는 모두 6의 배수이므로 2개의 짝수로 6, 12 또는 6, 18을 취할수 없습니다. 이렇게 하여 6, 10; 10, 12; 10, 18; 12, 18인 4가지 경우만 있을수 있고 (12, 15, 18)=3이 되는데 (a, b, c)=1에 모순됩니다. 그러므로 3가지 경우만 있을수 있습니다.

풀기 (6, 10)=2, (6, 15)=3, (10, 15)=5, (6, 10, 15)=1; (10, 12)=2, (12, 15)=3, (10, 15)=5, (10, 12, 15)=1, (10, 15)=5, (10,

18)=2, (15, 18)=3, (10, 15, 18)=1이므로 조건을 만족시키는 a, b, c는 아래의 3개 조입니다.

$$\{6, 10, 15\}, \{10, 12, 15\}, \{10, 15, 18\}$$

이 문제를 또 다음과 같이 생각할수 있습니다. 남아있는 수는 모두 합성수여야 합니다. 그것들의 씨인수분해식중에서 씨수 2, 3, 5, 7만이 있을수 있는데 이 씨수를 적당히 결합시키면 다음과 같은 풀이가 얻어집니다.

첫번째 결합: 2×3 2×5 3×5

두번째 결합: $2^2\times3$, 3×5

세번째 결합: 2×5, 3×5, 2×3^2

풀이는 우에서 지적한 세가지입니다.

실례 4. $[a, b]=1,000$, $[b, c]=2,000$, $[c, a]=2,000$입니다. 이 요구를 만족시키는 수조 (a, b, c)는 모두 몇조가 있습니까?

따져보기 a가 b로 말끔히 나누어질 때 $[a, b]=a$입니다. 먼저 a, b, c의 3개 수중에서 어떤 두수를 고정시키고 세번째 수에 몇가지 가능성이 있는가를 봅시다.

먼저 $a=1,000$, $c=2,000$이라고 하면 이때 b는 1,000의 약수로 되여야 하고 $[a, b]=1,000$, $[b, c]=2,000$이 됩니다. $1,000=2^3\times5^3$이고 b는 또 a의 약수이며 이때 a의 약수는 $[(3+1)\times(3+1)=]16$개 즉 b는 16가지일수 있으므로 이와 같은 수조는 16개 조가 있게 됩니다.

다시 $b=1,000$, $c=2,000$ 이라고 하면 이때 a는 1,000의 약수여야 하고 문제의 조건을 모두 만족시킵니다. 우에서 지적한 16조중에 있는것과 같은 한조를 지워버리면 $a=b=1,000$, $c=2,000$이 됩니다. 이때 아직도 $(16-1=)15$개 조가 있습니다.

이제 a, b, c의 3개 수중의 1개 수를 고정한 경우를 다시 봅시다.

$c=2,000$이라고 하면 문제에서 준 $[a, c]=2,000$, $[b, c]=2,000$이라는 요구가 보장되기 위해서는 a, b는 2,000의 약수로 되여야 하며 이밖에 $[a, b]=1,000$이고 $1,000=2^3\times5^3$이므로 $a=2^3\times5^n$, $b=2^m\times5^3$이라고 할수 있습니다. $a=b=1,000$

인 경우를 제외하면 n은 0, 1, 2의 3개 값을 가질수 있고 m도 0, 1, 2의 3개 값을 가질수 있습니다. 즉 a는 8, 40, 200의 3개 값을 가질수 있고 b는 125, 250, 500의 3개 값을 가질수 있습니다.

그러므로 이와 같은 수조는 (3×3=)9조입니다.

a와 b를 바꾸면 또 9조가 얻어지므로 c=2,000일 때 우에서 지적한것과 겹치지 않는 수조는 모두 18조입니다.

a=1,000이라고 합시다. 문제에서 준 $[a, b]=1,000$, $[a, c]=2,000$, $[b, c]=2,000$의 요구를 보장하고 우에서 지적한 수조와 겹치지 않게 하기 위하여 $1,000=2^3\times5^3$, $2,000=2^4\times5^3$이므로 $b=2^n\times5^3$, $c=2^4\times5^m$이라고 할수 있습니다.

여기서 n은 0, 1, 2, 3의 4개의 값 즉 125, 250, 500, 1,000의 4개 수를 가질수 있고 m은 0, 1, 2의 3개 값을 취할수 있으며 c는 16, 80, 400의 3개값을 취할수 있습니다. 이때 이와 같은 수조는 모두 (4×3=)12조 있습니다.

다시 b=1,000이라고 합시다. 문제에서 준 $[a, b]=1,000$, $[a, c]=2,000$, $[b, c]=2,000$의 요구가 보장되고 우에서 지적된 수조와 겹치지 않게 하기 위하여 다시 $1,000=2^3\times5^3$, $2,000=2^4\times5^3$이라고 하고 우에서와 같이 $a=2^n\times5^3$, $c=2^4\times5^n$이라고 놓습니다.

여기서 n은 0, 1, 2의 3개 값 즉 a는 125, 250, 500의 3개 수만 취할수 있고 m은 0, 1, 2의 3개 값 즉 c는 16, 80, 400의 3개 수를 가질수 있으며 이때 이와 같은 수조는 모두 (3×3=)9조입니다.

풀기 먼저 a, b, c의 3개 수중에서 어떤 2개 수를 고정합니다. 먼저 a=1,000, c=2,000이라고 놓으면 1,000은 모두 16개의 수를 가지므로 b는 16가지의 서로 다른 수를 가질수 있습니다. 이때 수조는 16개 조가 있고 a, b를 바꾸고 우에서 지적한것과 같은 1조를 빼버리면 모두 15개 조가 얻어집니다.

a, b, c의 3개중에서 어떤 1개 수를 다시 고정합니다.

먼저 c를 고정합니다. c=2,000이라고 하면 이때 $a=2^3\times$

5^n, $b=2^m\times5^3$이며 문제에서 준 요구를 보장하고 우에서 지적한것과 겹치지 않게 하기 위하여 n, m은 모두 0, 1, 2의 3개 값만 취할수 있습니다. 이때 이와 같은 수조는 모두 (3×3=)9조이고 a, b를 바꾸면 또 9조가 얻어집니다.

다시 a를 고정합니다. a=1,000이라고 하면 이때 $b=2^n\times5^3$, $c=2^4\times5^m$이 됩니다.

문제의 요구를 만족시키고 우에서 이미 구한 수조와 겹치지 않게 하기 위하여 n은 0, 1, 2, 3을 취할수 있고 m은 0, 1, 2를 취할수 있습니다. 이때 이와 같은 수조는 모두 (4×3=)12조입니다.

마지막에 b를 고정합니다. b=1,000이라고 놓으면 $a=2^n\times5^3$, $c=2^4\times5^m$이 됩니다. 문제의 요구를 만족시키고 우에서 이미 구한 수조와 겹치지 않게 하기 위하여 n은 0, 1, 2, m은 0, 1, 2를 가질수 있습니다. 이때 이와 같은 수조는 모두 (3×3=)9조입니다.

문제의 조건을 만족시키는 수조는 모두

$$16+15+18+12+9=70$$

[**주의**] 여기서 125, 1,000, 16과 1,000, 125, 16은 서로 다른 수조입니다.

련습 22

1. 1반 학생들은 영예군인들을 방문하기 위하여 320알의 사과, 240알의 귤, 200알의 배를 준비하였습니다. 이 과일을 꼭 같은 묶으로 포장하려면 가장 많아서 몇개 묶으로 가를수 있습니까? 매 묶에 사과, 귤, 배들을 몇알씩 넣으면 됩니까? (매 묶에 들어가는 사과, 귤, 배의 알수는 꼭 같습니다.)

2. 길이가 96cm, 너비가 60cm인 직4각형모양의 한장의 종이가 있습니다. 이 종이장을 잘라서 크기가 같고 한 변의 길이가 옹근 cm인 바른4각형을 만들려고 합니다. 적어도 몇장을 만들수 있습니까?(이때 본래의 종이가 남지 말아야 합니다.)

3. 어떤 부속품을 가공하는데 3가지 공정을 거쳐야 합니다. 첫번째 공정을 맡은 로동자들은 매 사람이 1시간에 48개의 부속품을 완성할수 있고 두번째 공정을 맡은 로동자들은 매 사람이 1시간에 32개의 부속품을 완성할수 있으며 세번째 공정을 맡은 로동자들은 매 사람이 1시간에 28개의 부속품을 완성할수 있습니다. 세가지 공정에 적어도 각각 몇명의 로동자가 있어야 배합이 가장 적합합니까?

4. 3으로 나누면 2가 남고 4로 나누면 3이 남고 5로 나누면 4가 남는 1,000보다 크고 1,500보다 작은 모든 자연수를 구하십시오.

5. $(a, b)=12$, $[a, c]=300$, $[b, c]=300$입니다. a, b, c의 요구를 만족시키는 수조는 모두 몇조입니까? (12, 300, 300; 300, 12, 300을 두조로 계산합니다)

답 및 풀기방향

1. 가장 많아서 40개 몫으로 가를수 있습니다.

매 몫에는 8알의 사과, 6알의 귤, 5알의 배가 들어가야 합니다.

$(320, 240, 200)=40$, $320\div40=8$, $240\div40=6$, $200\div40=5$이므로 가장 많아서 40몫으로 가를수 있고 매 몫에는 8알의 사과, 6알의 귤, 5알의 배가 들어가야 합니다.

2. 40

$(96, 60)=12$, $(96\div12)\times(60\div12)=40$입니다.

그러므로 적어도 40장을 만들수 있습니다.

3. 첫번째 공정에 14명, 두번째 공정에 21명, 세번째 공정에 24명입니다.

$[48, 32, 28]=672$, $672\div48=14$, $672\div32=21$, $672\div28=24$이므로 첫번째, 두번째, 세번째 공정에 각각 14명, 21명, 24명을 배치해야 합니다.

4. 1,019, 1,079, 1,139, 1,199, 1,259, 1,319, 1,379, 1,439, 1,499

구하려는 자연수를 x라고 하면 $1,000<x<1,500$, $x+1$은 3, 4, 5의 공통배수입니다.

$[3,\ 4,\ 5]=60$, $17\times60=1,020$이므로 $x=1,019$, $(1,019+60=)$ $1,079$, $\cdots$, $1,499$

5. 30조

(1) $c=300$, $a=12$일 때 b는 12, 60, 300의 3개 값을 가질수 있고 a, b를 바꾸고 $a=b=12$, $c=300$인 경우를 제외하면 이때 5조가 있습니다.

(2) $b=300$, $a=12$일 때 (1)의 5조와 겹치지 않게 하기 위하여 c는 5^2, $5^2\times2$, $5^2\times2^2$, $5^2\times3$, $5^2\times2\times5$의 5개 값을 가질수 있고 a, b를 바꾸면 이때 10개 조가 됩니다.

(3) $a=12$일 때 (1), (2)에서 구한 15조와 겹치지 않게 하기 위하여 c가 각각 5^2, $5^2\times2$, $5^2\times2^2$, $5^2\times3$, $5^2\times3\times2$일 때 b는 12, 60의 두 값을 가질수 있고 a, b를 바꾸면 겹친 한가지를 빼버리면 모두 $5\times3=15$(조)가 있습니다.

$5+10+15=30$(조)

제23절. 최대공통약수와 최소공통배수의 몇가지 응용문제

이 절에서는 《두 자연수의 최대공통약수와 최소공통배수를 곱한 적은 이 두 자연수를 곱한 적과 같습니다.》는 결론을 응용하여 풀수 있는 몇개 문제를 고찰합니다. 몇개 수의 최대공통약수와 최소공통배수를 구하는 방법중의 하나가 짧은 나누기방법입니다. 가령 $(36,\ 24)=?$를 구하려 한다고 합시다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 36 & 24 \\ \hline 2 & 18 & 12 \\ \hline 3 & 9 & 6 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

이때 $36=2\times2\times3\times3$

$24=2\times2\times2\times3$

이고 $(36, 24)=2\times2\times3$, $[36, 24]=2\times2\times3\times3\times2$ 입니다.

만일 (36, 24)와 (36, 24)를 곱한다면 다음과 같이 됩니다.

$(36, 24)\times(36, 24)=(2\times2\times2)\times(2\times2\times3\times3\times2)=(2\times2\times3\times3)\times(2\times2\times2\times3)=36\times24$

36과 24를 다른 자연수로 바꾸었을 때 $(36\times24)\times[36\times24]$와 꼭 같은 결론이 존재합니다. 이로부터 앞에서 지적한 성질이 성립한다는것을 알수 있습니다. 이것을 식으로 표시하면

$$(a, b)\times[a, b]= ab \text{ 또는}$$

$$(a,b)=\frac{ab}{[a,b]},\ \ [a,b]=\frac{ab}{[a,b]}$$

실례 1. A, B 두 수의 최대공통약수는 6이고 최소공통배수는 36입니다. 두 수 A, B를 구하십시오.

따져보기 씨인수분해방법으로 두수의 최대공통약수를 구할 때 이 두 수의 최대공통약수는 이 두 수에 공통인 모든 씨수를 련이어 곱한 적이라는것을 알고있습니다. 여기서 최대공통약수는 6이고 $6=2\times3$입니다. 그러므로 두 수 A, B는 동시에 2와 3을 포함하여야 합니다. 또 두 수 A, B의 최소공통배수는 36이고 $36=2\times2\times3\times3$입니다.

이가운데서 A, B에 공통으로 들어있는 1개의 2와 1개의 3을 빼버리면 1개의 2와 1개의 3이 남습니다. 이 1개의 2와 1개의 3은 동시에 A, B의 두 수에 포함될수 없습니다. 그렇지 않다면 그것들의 최대공통약수로 6이 될수 없고 6보다 큰수여야 합니다. 그러므로 이 1개의 2와 1개의 3은 반드시 각각 A, B의 두 수중에 포함되여야 합니다. 그것들을 A, B 두수에 포함시키는 분배방법에는 다음의 몇가지가 있을수 있습니다.

A	2	3	1	2×3
B	3	2	2×3	1

이 방법에 대응하는 A, B의 두 수의 값은 각각 다음과 같습니다.

A	12	18	36	6
B	18	12	6	36

이제 $(a, b)\times[a, b]=ab$라는 결론에 의하여 이 문제의 다른 1개 풀이를 구해봅시다.

(A, B)=6이므로 A=$6q_1$, B=$6q_2$이라고 쓸수 있습니다. 여기서 q_1, q_2은 서로 소인 옹근수입니다. 만일 q_1, q_2이 서로 소가 아니면 (A, B)는 6보다 큰수입니다. 그러므로 q_1, q_2만 구하면 두 수 A, B를 구할수 있습니다.

(A, B)×[A, B]=A×B이므로 $6\times36=6q_1\times6q_2$입니다. 즉 $q_1q_2=6$이고 $6=1\times6=2\times3$입니다. 따라서 q_1, q_2값으로써 A, B의 두 수를 결정할수 있습니다.

풀기 (A, B)=6이므로 A=$6q_1$, B=$6q_2$이고 $(q_1, q_2)=1$입니다.

(A, B)×[A, B]=A×B이므로 $6\times36=6q_1\times6q_2$ 즉 $q_1q_2=6$, $6=1\times6=2\times3$입니다.

$q_1=1, q_2=6$일 때 A=6, B=36이고 거꾸로 A=36, B=6입니다.

$q_1=2, q_2=3$일 때 A=12, B=18이고 거꾸로 A=18, B=12입니다.

그러므로 두 수 A, B는 각각 6, 36과 12, 18입니다.

이와 같이 구한 결과는 앞에서 얻은 결과와 같습니다. 두 수의 최대공통약수와 최소공통배수가 클 때는 두번째 풀기법이 첫번째 풀기법보다 더 간편해집니다.

실례 2. 두 자연수의 합은 104,055이고 그것들의 최대공통약수는 6,937입니다. 이 두수를 구하십시오.

따져보기 이 두 자연수를 a, b로 표시하면

$$a+b=104,055,\ (a, b)=6,937$$

말끔나누기의 성질에 의하여

$$a=(a, b)q_1=69,37q_1$$

$$b=(a, b)q_2=69,37q_2,\ (q_1, q_2)=1$$

이 두 식을 $a+b=104,055$에 대입하면

$$69,37q_1+69,37q_2=104,055$$
$$69,37(q_1+q_2)=104,055$$
$$q_1+q_2=104,055\div6,937=15$$

q_1, q_2은 서로 소이므로 15=1+14=2+13=4+11=7+8입니다. 그러므로 q_1, q_2은 우의 4가지 경우의 값을 가질수 있으므로 대입하면 a, b의 값이 얻어집니다.

풀기 $a+b=104,055$, $(a, b)=6,937$이므로 $a=69,37q_1$, $b=69,37q_2$, $(q_1, q_2)=1$이 됩니다.

$$6,937(q_1+q_2)=104,055,\ q_1+q_2=15$$

가 됩니다.

q_1, q_2는 서로 소이므로 q_1, q_2은 다음의 4가지 경우가 가능합니다. 즉 1,14; 2,13; 11,7; 7,8을 대입하여 구한 a, b의 값은 다음의 4개 조입니다.

$$\begin{cases}a=6,937(97,118)\\b=97,118(6,937)\end{cases}\qquad\begin{cases}a=13,874(90,181)\\b=90,181(13,874)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=27,748(76,307)\\b=76,307(27,748)\end{cases}\qquad\begin{cases}a=48,559(55,496)\\b=55,496(48,559)\end{cases}$$

실례 3. 두수의 합은 60이고 그것의 최대공통약수와 최소공통배수의 합은 84입니다.

이 두 수를 구하십시오.

따져보기 두 자연수를 a, b로 표시하면 문제의 조건에 의하여

$$(a+b)=60,\ (a, b)+[a, b]=84$$

입니다.

$a=(a, b)q_1$, $b=(a, b)q_2$, $(a, b)=1$이므로 $(a, b)q_1+(a, b)q_2=60$ 즉

$$(a, b)(q_1+q_2)=60$$

입니다.

이밖에 $[a, b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$, $ab=(a, b)q_1(a, b)q_2$이므로 $(a, b)+(a,$

$b)q_1q_2=84$ 즉

$$(a, b)(1+q_1q_2)=84$$

입니다.

$(a, b)(q_1+q_2)=60$과 $(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 (a, b)가 동시에 60, 84의 약수라는것을 알수 있습니다. 다시말하여 (a, b)는 60, 84의 공통약수입니다.

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 60 & 84 \\ \hline 3 & 15 & 21 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$$

이므로 $(60, 84)=12$입니다.

이렇게 하여 (a, b)는 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개 수중에서 어느 1개를 가질수 있습니다.

이제 이 6가지 경우를 하나씩 따져봅시다.

$(a, b)=1$일 때 $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=60$이라는것을 알수 있습니다.

$(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+ q_1q_2=84$ 즉 $q_1q_2=83=1\times83$이고 $1+83=84\neq60$이므로 이때 풀이가 없습니다.

$(a, b)=2$일 때 $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=30$임을 알수 있고 $(a, \mathrm{b})(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+q_1q_2=42$임을 알수 있습니다.

즉 $q_1q_2=41=1\times41$이고 $1+41=42\neq30$이므로 이때도 풀이가 없습니다.

$(a, b)=3$일 때 $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=20$임을 알수 있고 $(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+q_1q_2=28$임을 알수 있습니다. 즉 $q_1q_2=27=1\times27$, $1+27=28\neq20$이므로 이때도 풀이가 없습니다.

$(a, b)=4$일 때 $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=15$임을 알수 있고 $(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+q_1q_2=21$ 즉 $q_1q_2=20=1\times20=4\times5$임을 알수 있습니다. 그런데 $1+20=21\neq15$. $4+5=9\neq15$이므로 이때도 풀이가 없습니다.

$(a, b)=6$일 때: $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=10$임을 알수 있고 $(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+q_1q_2=14$ 즉 $q_1q_2=13=1\times$

13임을 알수 있습니다. $1+13=14\neq0$이므로 이때로 풀이가 없습니다.

$(a, b)=12$일 때 $(a, b)(q_1+q_2)=60$으로부터 $q_1+q_2=5$임을 알수 있고 $(a, b)(1+q_1q_2)=84$로부터 $1+q_1q_2=7$이 얻어집니다. 즉 $q_1q_2=6=1\times6=2\times3$입니다. 그런데 $1+6=7\neq5$이고 $2+3=5$입니다. 이때 풀이가 있습니다. 즉 $(a, b)=12$, $q_1=2$, $q_2=3$일 때 $a=36$, $b=24$입니다. 거꾸로 $a=24$, $b=36$도 풀이입니다.

풀기 문제의 조건을 만족시키는 2개의 자연수는 24와 36입니다.

실례 4. 두 자연수의 두제곱합은 468이고 그것들의 최대공통약수와 최소공통배수의 합은 42입니다. 이 두 수를 구하십시오.

따져보기 구하려는 두 자연수를 a, b라고 하면 문제의 조건에 의하여 다음과 같은 식이 성립합니다.

$a^2+b^2=468 \qquad (a, b)+[a, b]=42$

$a=(a, b)q_1$, $b=(a, b)q_2$, $(q_1, q_2)=1$, $[a,b]=\frac{96}{(a,b)}$이므로

$$(a,b)+\frac{(a,b)q_1(a,b)q_2}{(a,b)}=42$$

가 되고 변형하면

$(a, b)+(a, b)q_1q_2=42$ 즉 $(a, b)(1+q_1q_2)=42$가 되고 $1+q_1q_2$는 옹근수이므로 (a, b)는 42의 약수입니다.

이밖에 $[(a,b)q_1]^2+[(a,b)q_2]^2=468$이므로 $(a, b)^2$은 468의 약수이고 $q_1^2+q_2^2=\frac{468}{(a,b)^2}$이 됩니다.

42의 약수로는 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42가 있습니다. (a, b)가 각각 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42일 때 $(a, b)^2$은 각각 1, 4, 9, 36, 49, 196, 441, 1,764가 됩니다. 그런데 이런 수들중에서 1, 4, 9, 36만이 468을 말끔히 나누므로 (a, b)는 1, 2, 3, 6의 4개 값만 취할수 있습니다.

$(a, b)=1$일 때 $(a, b)(1+q_1q_2)=42$로부터 $q_1q_2=41$임을 알수 있습니다.

$q_1^2+q_2^2=\frac{468}{(a,b)^2}$ 로부터 $q_1^2+q_2^2=468$ 임을 알수 있고 $41=1\times41$이고 $1^2+41^2=1+1,681>468$이므로 이때 풀이가 없습니다.

$(a, b)=2$일 때 $(a, b)(1+q_1q_2)=42$로부터 $q_1q_2=20$임을 알수 있고 $q_1^2+q_2^2=\frac{468}{(a,b)^2}$ 로부터 $q_1^2+q_2^2=117$이 얻어지고 $20=1\times20=4\times5$이며 $1^2+20^2=401>117$, $4^2+5^2=41\neq117$이므로 이때도 풀이가 없습니다.

$(a, b)=3$일 때 $(a, b)(1+q_1q_2)=42$로부터 $q_1q_2=13$이 얻어지고 $q_1^2+q_2^2=\frac{468}{(a,b)^2}$ 로부터 $q_1^2+q_2^2=52$가 얻어지고 $13=1\times13$, $1^2+13^2=170\neq52$이므로 이때도 풀이가 없습니다.

$(a, b)=6$일 때 $(a, b)(1+q_1q_2)=42$로부터 $q_1q_2=6$임을 알수 있고 $q_1^2+q_2^2=\frac{468}{(a,b)^2}$ 로부터 $q_1^2+q_2^2=13$이 나오고 $6=1\times6=2\times3$, $1^2+6^2=37\neq13$, $2^2+3^2=13$이 됩니다. 그러므로 이때 풀이가 있습니다.

풀기 $(a, b)=6$, q_1, q_2이 각각 2, 3일 때 두 자연수는 각각 12와 18입니다.

련습 23

1. 두수의 최대공통약수는 8, 최소공통배수는 64입니다. 이 두수를 구하십시오.
2. 수렬 15, 30, 45, ⋯, 165중에서 11의 배수로 되는 수는 몇개입니까?
3. 두 자연수의 합은 432이고 그것들의 최대공통약수

는 36입니다. 이 두수를 구하십시오.

4. 두 자연수의 차는 2이고 그것들의 최대공통약수와 최소공통배수의 합은 86입니다. 이 두수를 구하십시오.

5. 두 자연수의 차는 3이고 그것들의 최대공통약수와 최소공통배수의 적은 180입니다. 이 두수를 구하십시오.

답 및 풀기방향

1. 8과 64

씨인수분해하는 방법으로 두 수의 최대공통약수를 구할 때 이 두수에 공통인 씨수를 련이어 곱한 적이 그것들의 최대공통약수로 됩니다. 여기서 최대공통약수는 8이고 $8=2^3$이므로 구하려는 두 수 A, B는 동시에 3개의 2를 포함하여야 합니다. 또 두수 A, B의 최소공통배수가 64이고 $64=2^6$이므로 A, B에 공통인 3개의 2를 빼버리면 3개의 2가 남습니다. 이 3개의 2중에서 임의의 1개 2는 A, B의 두수중에 동시에 포함될수 없습니다. 그렇지 않으면 그것들의 최대공통약수가 8이 아니라 8보다 큰 수로 됩니다. 그러므로 3개의 2는 A, B의 두수중에서 어느 하나에만 속해야 합니다. 배합방안은 다음과 같습니다.

$$A: 2^3, 1$$

$$B: 1, 2^3$$

이 2가지 경우에 대응하는 A, B의 값은 각각 8, 64 또는 64, 8입니다. 그러므로 이 두수는 8과 64입니다.

2. 1

수렬 15, 30, 45, …, 중의 임의의 한수는 15의 배수입니다. 이 수들중에서 11의 배수를 찾아야 하므로 11의 배수는 모두 11, 15의 배수여야 합니다. 공통배수는 또 최소

공통배수의 배수여야 하므로 수렬 15, 30, 45, ⋯, 165중에서 최대인 11의 배수는 165입니다. $ab=(a, b)[a, b]$로부터 수렬중의 11의 배수의 개수는

$$\frac{165}{[15,11]}=(11,15)=1$$

입니다. 그러므로 1개만이 11의 배수입니다.

3. 180과 252, 36과 396

구하려는 2개의 수를 각각 a, b라고 하면

$a+b=132$, $(a, b)=36$입니다. $(a, b)=36$이므로 $a=36q_1$, $b=36q_2$, $(q_1, q_2)=1$입니다.

또 $a+b=432$이므로 $q_1+q_2=12$입니다.

$12=1+11=5+7$이므로

q_1, q_2이 각각 1과 11일 때 a, b는 각각 36과 396이 됩니다.

q_1, q_2이 각각 5과 7일 때 a, b는 각각 180과 252됩니다.

4. 12와 14

구하려는 두 수를 a, b라고 하면 $a-b=2$, $(a,b)+[a,b]=86$이 됩니다.

$a=(a,b)q_1$, $b=(a,b)q_2$, $(q_1, q_2)=1$이므로 $ab=(a,b)(a,b)q_1q_2$이 됩니다.

또 $ab=(a,b)[a,b]$이므로 $(a,b)^2q_1q_2=(a,b)[a,b]$ 즉 $[a, b]=(a,b)q_1q_2$입니다.

또 $(a,b)+[a,b]=86$이므로 $(a, b)+(a,b)q_1q_2=86$ 즉 $(a, b)(1+q_1q_2)=86$입니다.

또 $a-b=2$이므로 $(a,b)(q_1-q_2)=2$입니다.

이밖에 $(a, b)(1+q_1q_2)=86$과 $(a, b)(q_1-q_2)=2$라는데로부터 (a, b)는 86의 약수이고 또 2의 약수라는것을 알수 있습니다. 즉 (a, b)는 86과 2의 공통약수입니다. 이 공통약수는 1 또는 2뿐입니다.

$(a, b)=1$일 때 $(a, b)[1+q_1q_2]=86$이라는데로부터 $1+q_1q_2=86$이 얻어집니다. 또 $(a, b)(q_1-q_2)=2$로부터 $q_1q_2=85$, $q_1-q_2=2$

가 얻어집니다. $(q_1q_2)=1$이므로 $85=1\times85=5\times17$이고 1과 85와 5와 17의 차는 모두 2가 아닙니다. 그러므로 이때 풀이가 없습니다.

$(a, b)=2$일 때 $(a, b)(1+q_1q_2)=86$으로부터 $1+q_1q_2=43$이 얻어지고 $(a, b)(q_1-q_2)=2$로부터 $q_1-q_2=1$이 얻어집니다. 이리하여 $q_1q_2=42$, $q_1-q_2=1$이 나옵니다. q_1와 q_2은 서로 소이므로 $42=1\times42=2\times21=3\times14=6\times7$입니다.

여기서 6과 7은 서로 소일뿐만아니라 $7-6=1$입니다.

그러므로 $q_1=7$, $q_2=6$입니다. 이때 $a=2\times7=14$이고 $b=2\times6=12$입니다.

그러므로 구하려는 두 수는 12와 14입니다.

5. 구하려는 두 수를 a, b라고 하면 $a-b=3$, $(a, b)[a, b]=180$입니다. $a=(a, b)q_1$, $b=(a, b)q_2$, $(q_1, q_2)=1$이므로 $ab=(a, b)^2q_1q_2$입니다. 또 $(a, b)[a, b]=ab$이므로 $(a, b)^2 q_1q_2=180$이 됩니다. $a-b=3$ 즉 $(a, b)(q_1-q_2)=3$이므로 (a, b)는 3의 약수입니다. $(a, b)=1$ 또는 3입니다.

$(a, b)=1$일 때 $q_1-q_2=3$입니다. 이때 조건을 만족시키는 풀이는 없습니다.

$(a, b)=3$일 때 $q_1-q_2=1$이고 $180=3^2\times4\times5$, $5-4=1$입니다. 이때 $q_1=5$, $q_2=4$이므로 $a=3\times5=15$, $b=3\times4=12$입니다.

구하려는 두 수는 15와 12입니다.

이 책에는 학생들의 수학적지능을 체계적으로 키워주기 위한 수학문제들 즉 도형의 분할과 무이, 보조수단을 리용하여 면적구하기, 방정식을 세워 기하문제를 푸는 방법, 분수의 성질, 최소공통배수와 최대공통약수, 《소 풀먹기》 문제 등이 서술되여있다.

이 책은 소학교, 중학교 학생들을 위한 참고서로 출판한다.

풀수록 재미나는 수학문제풀이 3

편역　교수 윤인철　　　심사　학사 김분희
편집　최남숙　　　　　　　　학사 정광현
장정　리승일　　　　　　교정　최미레

낸　곳　외국문도서출판사
인쇄소　평양시인쇄공장

발행 주체94(2005)년 6월 13일 인쇄 주체94(2005)년 6월 20일

교－04－1184　　　5000부　　　값 240원